Relativistische Quantenfeld-Theorie

Prof. W. Hollik, Uni-Karlsruhe, WS 95/96 und SS 96

Gerrit Jahn

31. Oktober 1996

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Dieses Skript entstand nach der Vorlesung *Relativistische Quantenfeldtheorie*, die Prof. Wolfgang Hollik im Wintersemester 1995/96 und im Sommersemester 1996 an der Universität Karlsruhe gehalten hat.

Im Moment ist noch nicht das komplette zweite Semester enthalten, sondern nur der Prüfungsstoff. Es fehlt die Behandlung von Infrarot-Divergenzen und die Einführung in die Eichtheorie.

In der vorliegenden Auflage ist das Skript bereits einmal korrigiert worden. Es liegen jedoch sicherlich immer noch schreibtechnische und sachliche Fehler vor. Es wäre nett, wenn mir diese von der Leserschaft mitgeteilt würden. Danke.

Das Skript wurde nicht von Prof. Hollik „authorisiert“, so daß dieser nicht für die Folgen evtl. Fehler zur Rechenschaft gezogen werden kann.

Herzlich danken möchte ich an dieser Stelle Achim Stremplat und Dominik Stöckinger, die mir bei inhaltlichen Fragen stets hilfreich zur Seite standen.

Ab sofort kann dieses Skript von folgender WWW-Seite bezogen werden:

`http://www.planetjahn.de/skripte`

Falls Probleme, Anmerkungen oder Berichtigungen bzgl. des Skripts bestehen sollten, findet sich meine Email-Adresse auf obiger Webseite.

München, Mai 2003,

Gerrit Jahn

Teil I

Quantenfeldtheorie I

Kapitel 1

Teilchen, Teilchenzustände

1.1 Poincaré-Transformationen

Die Invarianz unter Poincaré-Transformationen ist eine grundlegende raum-zeitliche Symmetrie, welche zusätzlich zur *normalen* Lorentz-Transformation noch die raum-zeitlichen Translationen und Spiegelungen beinhaltet.

Die Poincaré-Transformationen bilden ebenso wie die Lorentz-Transformationen eine Gruppe (die Poincaré-Gruppe).

Im Verlauf dieser Vorlesung wird $c = \hbar = 1$ gesetzt und die übliche Notation für Tensoren im Minkowskiraum benutzt, d.h. ein sog. *Weltpunkt* hat folgende Darstellung

$$(t, \vec{x}) = (x^0, \vec{x}) = (x^\mu),$$

wobei die x^μ die kontravarianten Komponenten eines Vierervektors sind.
Sofern griechische Buchstaben auftreten, nehmen diese die Werte

$$\mu, \nu, \kappa, \lambda, \ldots \in \{0, 1, 2, 3\},$$

während normale lateinische Buchstaben nur die räumlichen Anteile durchlaufen, d.h.

$$i, j, k, l, \ldots \in \{1, 2, 3\}.$$

Der Viererimpuls wird aus dem räumlichen Impuls und der Energie eines Teilchens zusammengesetzt

$$(p^\mu) = (p^0, \vec{p}) = (E, \vec{p}).$$

Der metrische Tensor (üblicherweise: kurz Metrik) habe folgende Gestalt

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Damit erhält man aus der Kontraktion der Metrik mit den kontravarianten Komponenten eines Vektors dessen kovariante Komponenten, welche sich allerdings nur um einen Faktor (-1) in dem rämlichen Anteil unterscheiden

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\mu \equiv \sum_{\mu=0}^{3} g_{\mu\nu} x^\mu.$$

Das Summenzeichen läßt man üblicherweise weg (Einsteinsche Summenkonvention).
Das Skalarprodukt zweier 4-Vektoren kann man nun so schreiben

$$x \cdot y = x_\mu y^\mu$$

und das Längenquadrat ergibt sich aus dem Skalarprodukt eines Vektors mit sich selbst.
Die Ableitungsoperatoren lassen sich ebenfalls als Vierervektoren schreiben

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}; \qquad \partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = g^{mu\nu}\partial_\mu; \qquad \Box = \partial_\mu\partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta.$$

1.1.1 Poincaré-Transformationen

Die Poincaré-Transf. setzen sich, wie bereits erwähnt, aus den

- raumzeitlichen Translationen

  $$x'^\mu = x^\mu + x^\mu, \qquad a^\mu : \text{ konst. Vektor}$$

- und den homogenen Lorentz-Transformationen zusammen

  $$\Lambda : \quad x'\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu,$$

  wobei $\Lambda^\mu\,\nu$ eine 4×4-Matrix ist, welche durch folgende Bedingungen definiert ist

  $$g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma = g_{\rho\sigma},$$

  woraus durch Determinantenbildung sofort $\det\Lambda = \pm 1$ folgt und (nach kurzer Rechnung), daß das vierdimensionale Volumenelemtent d^4x invariant bleibt.

Die Poincaré-Transformationen haben also folgende Gestalt

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu, \qquad \det\Lambda = +1.$$

1.1.2 Poincaré-Gruppe

Die Poincaré-Transformationen bilden eine zehnparametrige (3 Drehungen, 3 Boosts, 4 Translationen) *Lie-Gruppe*, so daß sich die infinitesimale Transformation wie folgt linear in den Parametern ausdrücken läßt

$$\longrightarrow \mathbf{1} - i\delta\Theta^k J_k - i\delta\phi^l K_l - i\delta a^\mu P_\mu + O(\delta\Theta^2, \delta\phi^2, \delta a^2),$$

wobei die $\delta\{\Theta, \phi, a\}$ die infinitesimalen Parameter der Drehungen, Boosts und Translationen sind.
Die J_k=4-Drehungen, K_l=Boosts und P_μ=Impuls bezeichnet man als die *Generatoren* der Gruppe.

Die J_k und die K_l lassen sich als 4×4-Matrizen darstellen unter denen folgende Vertauschungsregeln (VR) gelten, wenn man homogene Lorentz-Transformationen ($a^\mu = 0$) betrachtet

$$\longrightarrow \left.\begin{array}{rcll} [J_1, J_2] & = & iJ_3 & \text{zyklisch} \\ [K_1, K_2] & = & -iJ_3 & \text{zyklisch} \\ [J_1, K_2] & = & iK_3 & \text{zyklisch} \\ [J_l, K_l] & = & 0 & (l = 1, 2, 3) \end{array}\right\} \tag{1.1}$$

Diese Gleichungen (1.1) stellen die *Lie-Algebra* der homogenen Lorentz-Gruppe dar.
Eine kompaktere Schreibweise der Gleichungen (1.1) erhält man mittels des Tensors

$$J_{\mu\nu} = -J_{\mu\nu},$$

der wie folgt aus sechs unabhängige Komponenten besteht

$$J_{0l} = K_l \quad l = 1, 2, 3 \tag{1.2}$$

$$J_{kl} = \varepsilon^{klm} J_m, \text{ d.h.: } J_{12} = J_3,\ J_{23} = J_1,\ J_{31} = J_2. \tag{1.3}$$

Mittels diesem Tensor kann man nun die Gleichungen (1.1) ersetzen

$$\boxed{[J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] = i\big(g_{\mu\sigma}J_{\nu\rho} + g_{\nu\rho}J_{\nu\sigma} - g_{\mu\rho}J_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma}J_{\mu\rho}\big)} \tag{1.4}$$

Man kann die Generatoren K_l und J_k der homogenen Lorentz-Gruppe auch mittels Differentialoperatoren darstellen (Übung)

$$x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z \tag{1.5}$$

$$\longrightarrow J_3 = \frac{1}{i}\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) \quad \text{und zyklisch,} \tag{1.6}$$

was „formal“ dem Bahndrehimpuls entspricht und

$$K_1 = i\left(t\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial t}\right), \quad K_2 = i\left(t\frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial t}\right), \quad K_3 = i\left(t\frac{\partial}{\partial z} + z\frac{\partial}{\partial t}\right). \tag{1.7}$$

Die durch die Gleichungen (1.6) und (1.7) definierten Operatoren erfüllen ebenfalls die Algebra (1.1), womit diese auch *ohne* Matrizendarstellung erfüllt wäre (ja und?)

Anmerkung: Man kann den in (1.3) definierten Tensor auch aufteilen in

$$J_{\mu\nu} = L_{\mu\nu} + S_{\mu\nu},$$

wobei $L_{\mu\nu}$ Differentialoperatoren sind und $S_{\mu\nu}$ eine Matrix.
Betrachtet man zusätzlich noch die Translationen, erhält man mit

$$P_\mu = i\partial_\mu = i\frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

zusätzliche Vertauschungsrelationen

$$\boxed{[P_\mu, P_\nu] = 0, \qquad [P_\mu, J_{\rho\sigma}] = i\big(g_{\mu\rho}P_\sigma \cdot g_{\mu\sigma}P_\rho\big)}. \tag{1.8}$$

Nimmt man die Gleichungen (1.4) und obige (1.8) zusammen, so hat man die komplette Lie-Algebra der Poincaré-Gruppe, welche (wie — ähem — zum Teil gesehen) unabhängig von der gewählten Darstellung ist.

1.1.3 Invariante Operatoren

Unter Poincaré-Transformationen invariante Operatoren müssen mit den Generatoren $J_{\mu\nu}$ und P_μ kommutieren, daher

$$P^2 = P_\mu P^\mu \text{ mit } \left[P^2, P_\mu\right] = 0, \; \left[P^2, J_{\mu\nu}\right] = 0 \tag{1.9}$$

$$W^\mu = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} J_{\nu\rho} P_\sigma \quad \text{Pauli-Lubanski-Operator} \tag{1.10}$$

$$\longrightarrow \left[W^2, P_\mu\right] = 0, \qquad \left[W^2, J_{\nu\rho}\right] = 0. \tag{1.11}$$

Weitere invariante Operatoren gibt es nicht.
Die physikalische Bedeutung von $P^2 \sim m^2$ ist klar, während der von W^2 noch nachgegenagen werden muß.

1.2 Teilchenzustände

Ein freies Teilchen kann man als Eigenzustand $|p\rangle$ des Impulsoperators P_μ beschreiben

$$P_\mu|p\rangle = p_\mu|p\rangle, \qquad P^\mu|p\rangle = p^\mu|p\rangle.$$

Für Teilchen der Masse m gilt die Massenschalen-Bedingung

$$p_\mu p^\mu = p^2 = (p^0)^2 - \vec{p}^2.$$

Es ist nun $|p\rangle \in$ Hilbertraum $\mathcal{H}$. Dann ist auch der poincaré-transformierte Vektor $|p'\rangle \in \mathcal{H}$

$$p \xrightarrow{\Lambda,a} p' = \Lambda p, \; p'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu p^\nu \quad \longrightarrow |p'\rangle = |\Lambda p\rangle \in \mathcal{H}$$

Die Transformation $|p\rangle \to |\Lambda p\rangle$ kann man *im* Hilbertraum mittels eines unitären Operators $U(\Lambda,a)$ beschreiben

$$(\Lambda,a): \quad |p\rangle \to U(\Lambda,a)|p\rangle = |\Lambda,a\rangle.$$

Der Zustandsraum entspricht also den Darstellungen der Poincaré-Gruppe .

Die Darstellungen einer Gruppe $G=\{g\}$ seien definiert durch eine Abbildung der Gruppenelemente g auf Operatoren (Matrizen) $U(g)$ eines Vektorrraums

$$\begin{aligned} g &\to U(g), \quad \text{so daß die algebraische Struktur erhalten bleibt:} \\ g_1\circ g_2 &\to U(g_1)U(g_2) \\ I &\to \mathbf{1} \\ g^{-1} &\to U(g)^{-1} \end{aligned}$$

Betrachtet man nun die infinitesimale Transformation (hier speziell die Poincaré-Transformation)

$$x'^{\mu} = (\delta^{\mu}{}_{\nu} + \omega^{\mu}{}_{\nu})x^{\nu} + \varepsilon^{\mu},$$

wobei sowohl das ε^{μ} als auch das 6-parametrige $\omega^{\mu\nu} = -\omega^{\nu\mu}$ infinitesimal sind, so erhält man als „infinitesimalen“ Operator

$$U(\omega,\varepsilon) = \mathbf{1} - \frac{i}{2}w^{\mu\nu}J_{\mu\nu} - i\varepsilon^{\mu}P_{\mu},$$

womit nun $J_{\mu\nu}$ und P_{μ} Operatoren (Observablen) auf $\mathcal{H}$, dem *1-Teilchen-Raum* sind.

In dieser Schreibweise werden nun nochmals die unter Poincaré-Transf. invarianten Operatoren P^2 und W^4 betrachtet

- Invarianz des Quadrat des Impulsoperators unter P.Tr.

$$\begin{aligned} P^2|p\rangle &= P^{\mu}P_{\mu}|p\rangle = p^{\mu}p_{\mu}|p\rangle = p^2|p\rangle. \\ \text{Poincaré-Transf.:}\quad U(\Lambda,a)|p\rangle &:= |\Lambda p\rangle \\ P^{\mu}|\Lambda p\rangle &= (\Lambda p)^{\mu}|\Lambda p\rangle \\ \longrightarrow P^{\mu}P_{\mu}|\Lambda p\rangle &= (\Lambda p)^2|\Lambda p\rangle = p^2|\Lambda p\rangle \end{aligned}$$

  Man sieht, daß p^2 ein unter Poincaré-Transformationen invariante Eigenwert von $P^2 = P^{\mu}P_{\mu}$ ist. Für ein Teilchen der Masse m gilt $p^2 = m^2$, so daß im 1-Teilchenraum folgende Relation für P^2 entsteht

$$\longrightarrow \text{1-Teilchenraum:} \quad \boxed{P^2 = \mathbf{1}\cdot m^2}.$$

- Der Pauli-Lubanski-Operator W^{μ} ist invariant unter Poincaré-Transformationen ins Ruhesystem:

$$\begin{aligned} W^{\mu} &= \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}J_{\nu\rho}P_{\sigma} \quad \text{mit } P_{\sigma} \xrightarrow{\text{Ruhesystem}} (m,\vec{0}) \quad \longrightarrow W^{\mu}_{\text{Ruhe-S.}} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}J_{\nu\rho}\cdot m \\ \longrightarrow W^0 &= 0; \qquad W^i = \frac{1}{2}m\underbrace{\varepsilon^{ijk0}}_{=-\varepsilon^{ijk}}J_{jk} \\ \longrightarrow W^1 &= mJ_{23} = mJ_1; \quad W^2 = mJ_{31} = mJ_2, \quad W^3 = mJ_{12} = mJ_3. \end{aligned}$$

  Im Ruhesystem entspricht der Pauli-Lubanski-Operator also (bis auf einen Faktor m) dem Drehimpulsoperator. Und damit

$$\longrightarrow W^2 = -\vec{W}^2 = -m^2\vec{J}^2 \quad \text{mit } \vec{J}^2 = S(S+1)\cdot\mathbf{1},\ S = 0,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},\ldots$$

1.2.1 Irreduzible Darstellung

Wenn eine Darstellung einer Gruppe irreduzibel ist, heißt das, daß es keinen invarianten Unterraum mehr gibt. (Unterraum bedeutet, daß jeder Zustand aus einem festen Referenzzustand durch Gruppenoperationen erreicht werden kann).

Eine irreduzible Darstellung der Poincaré-Gruppe ist gegeben durch die irreduziblen Darstellungen der J_k zu festem s und den irreduziblen Darstellungen P_μ zu festem m. D.h., durch m,s werden die irreduziblen Darstellungen der Poincaré-Gruppe festgelegt

$$\begin{aligned}&m,s \text{ fest}: \quad P^2 = m^2\cdot\mathbf{1}, \quad W^2 = -m^2 s(s+1)\cdot\mathbf{1}\\ &\longrightarrow \text{alle irred. Darstellungen d. Poincaré-Gruppe.}\end{aligned}$$

Allgemein besagt dies das *Schursche Lemma*:

Für eine Gruppe mit Erzeugenden T_a und Operatoren $C_i(T_1,\ldots,T_n)$, welche Polynome in den T_i sein müssen, wobei der Kommutator

$$[C_i,T_a] = 0, \quad a = 1,\ldots,N$$

zwischen diesen *Casimir-Operatoren* (mit Eigenwerten λ_i) und den Erzeugenden T_a verschwinde, gilt

$$C_i = \lambda_i\cdot\mathbf{1}$$

in den irreduziblen Darstellungen der Gruppe, die wiederum nun durch die Angabe der λ_i festgelegt sind.

Somit sind also die Operatoren P^2 und W^2 die Casimir-Operatoren der Poincaré-Gruppe (bei festem m,s).

Zurück zu den Teilchen: Sei m die physikalische Masse des Teilchens und s der Spin (das Teilchen befinde sich im Ruhesystem), dann ist das Teilchen durch die Angabe von (m,s) festgelegt.

Ein Teilchen ist also gegeben durch eine irreduzible Darstellung der Poincaré-Gruppe (inkl. Spiegelungen) zu festem (m,s)

Der Darstellungsraum ist also der 1-Teilchenzustandsraum, in welchem die Zustände durch einen Zustandsvektor

$$\left|m,s,p,\sigma\right\rangle, \quad \text{mit } \sigma \quad = \overbrace{-s,-s+1,\ldots,s}^{2s+1} \quad \text{kurz: } \left|p,\sigma\right\rangle, \tag{1.12}$$

wobei σ die Spinprojektion auf eine feste Achse darstellt. Wählt man als diese feste Achse die Impulsrichtung $\vec{p}$, dann bezeichnet man σ als *Helizität*.

Der Zustand (1.12) ist bezüglich seiner raumzeitlichen Eigenschaften vollständig. Es können evtl. noch weitere Quantenzahlen auftreten, z.B. Ladung, Isospin, usw., welche jedoch sog. *innere Quantenzahlen* sind, also nicht mehr raumzeitliche Eigenschaften aufweisen.

Obige Zustände seien wie folgt normiert (Invariante „Normierung")

$$\left\langle p'\sigma'\middle|p\sigma\right\rangle = 2p^0\delta^3(\vec{p}-\vec{p}\,')\cdot\delta_{\sigma\sigma'}, \tag{1.13}$$

wobei $p^0 = \sqrt{\vec{p}^2+m^2}$ und die Quantenzahl $p \in$ kontinuierlichem Spektrum.

Diese Normierung ist invariant, da

$$\int d^4p\,\delta(p^2-m^2)\cdot\Theta(p^0) = \int\frac{d^3p}{2p^0}\Theta(p^0) \qquad (p^0 = +\sqrt{\vec{p}^2+m^2}).$$

Die linke Seite besteht aus invarianten Produkten, d.h., die rechte ist ebenfalls invariant, was wiederum bedeutet, daß $d^3p/2p^0$ ein invariantes Maß ist. Integriert man nun das „Ergebnis" der Normierung aus (1.13) über dieses Maß, so erhält man eine 1.

$$\int\frac{d^3p}{2p^0}\cdot 2p^0\delta^3(\vec{p}-\vec{p}\,') = 1.$$

Ein *eigentlich normierbarer Zustand* sollte wie folgt auf 1 normierbar sein (was wohl eigentich exakter wäre)

$$\left|\varphi\right\rangle = \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{p^0} \varphi(p) \left|p\right\rangle, \quad \text{wobei } \varphi(p) = \varphi'(p' = \Lambda p) \text{ ein Skalar.}$$

Hier wird jedoch auf die Delta-Funktion normiert, da dann „später" die Rechnungen einfacher werden (haha!).

1.2.2 n-Teilchenzustände

Die Produktbasis eines Produktraumes $\mathcal{H}^{(n)}$ sei gegeben durch die Produktzustände

$$\left|p_1\sigma_1\right\rangle \left|p_2\sigma_2\right\rangle \ldots \left|p_n\sigma_n\right\rangle \quad \text{Basis von } \mathcal{H}^n.$$

Bei gleichartigen Teilchen ist dieser Produktzustand symmetrisch ($s = 0, 1, 2, \ldots$), bei ungleichartigen antisymmetrisch ($s = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \ldots$).

Der 0-Teilchenraum wird aufgespannt von dem Vakuum $\left|0\right\rangle$ mit der Normierung $\left\langle 0 \middle| 0 \right\rangle = 1$.

Der Raum aller Teilchen, der also aufgespannt wird vom Vakuum und allen n-Teilchenzuständen wird als *Fock-Raum* bezeichnet

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(0)} + \sum_n \mathcal{H}^{(n)}. \tag{1.14}$$

Es ist zu beachten, daß Teilchen mit der Masse 0 gesondert betrachtet werden müssen, denn für Masse $m \neq 0$ kann man eine Transformation ins Ruhesystem durchführen, so daß der 4-Vektor $p = (m, \vec{0})$ invariant unter dreidimensionalen Drehungen ist.

Bei masselosen Teilchen ist dies nicht möglich, man wählt stattdessen den Viererimpuls k so, daß dessen zeitlicher Anteil dem räumlichen in z-Richtung entspricht („Photon" läuft längs der z-Achse)

$$k = (k, 0, 0, k) \longrightarrow k^2 = 0.$$

Dieser Viererimpuls ist invariant unter Drehungen um die z-Achse (d.h., daß in diesem Fall die *kleine Gruppe* anstelle der dreidim. Drehgruppe kommt). Die irreduziblen Darstellungen sind (da abelsche Gruppe) eindimensional, woraus folgt, daß die Helizität σ (oder bei Spiegelungen auch $-\sigma$) zwei Werte annehmen kann, d.h. es gibt zwei Helizitätszustände, welche den 2 Polarisationzuständen (klass.) entsprechen.

Kapitel 2

Klassische Felder

2.1 Lagrange-Formalismus

In der Punktmechanik sind $q_i, \dot{q}_i,\ i = 1, \dots, n$ die dynamischen Variablen eines System mit folgender Lagrange-Funktion

$$L = L(q, \dot{q})$$

und damit folgender Wirkung

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, L\big(q(t), \dot{q}(t)\big) = S[q].$$

Variiert man die Wirkung wie üblich (gemäß dem Hamiltonschem Prinzip), erhält man die Euler-Lagrangeschen Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned}
q_k \to q_k + \delta q_k; \quad \dot{q}_k = \dot{q}_k + \delta q_k \quad \text{mit } \delta q_k\big|_{t_1}^{t_2} = 0 \\
\delta S = S[q + \delta q] - S[q] \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{(Hamiltonsches Prinzip).} \\
\longrightarrow \delta S = 0 = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \sum_{k=1}^{n} \delta q_k \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right\} \\
\delta q_k \text{ bel.} \quad \longrightarrow \boxed{\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = 0}_{k=1,\dots,n}
\end{aligned}$$

In der Feldtheorie werden nun anstelle von „punktförmigen Variablen“ die Felder als dynamische Variablen betrachtet

$$q_k \to \phi(\vec{x}, t) \equiv \phi(x), \qquad \dot{q}_k \to \partial_\mu \phi(x).$$

Die Lagrangefunktion L wird als Integral über eine *Lagrange-Dichte* $\mathcal{L}$ dargestellt, welche von nun an das betrachtete physikalische System beschreibt.

$$L = \int \mathrm{d}^3x\, \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = L(t).$$

Die Wirkung ergibt sich wie gehabt aus

$$S = \int \mathrm{d}t\, L = \int \mathrm{d}^4x\, \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = S[\phi].$$

Aus einer invarianten Lagrangedichte folgt somit eine invariante Wirkung, woraus sich invariante Bewegungsgleichungen ergeben. Man variiert wie oben die dynamischen Variablen, also die Felder

$$\phi \to \phi + \delta\phi, \partial_\mu \phi \to \partial_\mu \phi + \partial_\mu \delta\phi \quad \text{mit } \lim_{x^\mu \to \infty} \delta\phi = 0$$

und wendet das Hamiltonscher Prinzip an

$$\delta S = S[\phi + \delta\phi] - S[\phi] \stackrel{!}{=} 0.$$

Im allgemeineren Fall der mehrkomponentigen Felder ist $\mathcal{L}$ eine Funktion dieser Felder

$$\begin{aligned} &\phi_1, \ldots, \phi_n; \quad \partial_\mu\phi_1, \ldots, \partial_\mu\phi_n \\ \longrightarrow\ &\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi_1, \ldots, \phi_n, \partial_\mu\phi_1, \ldots, \partial_\mu\phi_n) \end{aligned}$$

Führt man die Variation nun aus, ergeben sich die Bewegungs- bzw. Feldgleichungen:

$$\delta S = \int \mathrm{d}^4x \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_k}\delta\phi_k + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_k)}\partial_\mu(\delta\phi_k) \right\} \stackrel{\text{p.I.}}{=} \int \mathrm{d}^4x \sum_{k=1}^{n} \delta\phi_k \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_k} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_k)} \right\} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\delta\phi_k \text{ bel.} \longrightarrow \boxed{\partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_k)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_k} = 0}.$$

2.1.1 Kanonischer Feldimpuls

Klassisch ist der kanonische Impuls bei gegebener Lagrangefunktion $L(q, \dot{q})$ wie folgt gegeben

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}.$$

In der Feldtheorie ist der kanonische Feldimpuls Π_k analog definiert (Unterschied: Statt Lagrangefunktion wird die Lagrangedichte verwendet).

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi_1, \ldots, \phi_n, \partial_\mu\phi_1, \ldots, \partial_\mu\phi_n) \qquad \Pi_k(x) := \tfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi_k)}, \qquad (\partial_0 = \partial/\partial_t).$$

2.1.2 Hamiltonfunktion

In der Mechanik ist die Hamiltonfunktion folgendermaßen definiert

$$H = \sum_k p_k \cdot \dot{q}_k - L.$$

Entsprechend definiert man in der Feldtheorie ein Hamilton-Dichte $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{H}(x) = \mathcal{H} := \sum_{k=1}^{n} \Pi_k \frac{\partial\phi_k}{\partial t} - \mathcal{L}$$

Aus der Hamilton-Dichte erhält man wie bei der Lagrange-Dichte die Hamiltonfunktion via Integration

$$H = \int \mathrm{d}^3x\, \mathcal{H}.$$

Da die Hamilton-Dichte $\mathcal{H}$ nicht invariant unter Poincaré-Transformationen ist, wird ihr gegenüber jedoch die Lagrange-Dichte in der Feldtheorie bevorzugt.

2.2 Symmetrien, Ströme, Noethertheorem

Gegeben sei eine Lagrange-Dichte $\mathcal{L}(\phi_1, \ldots, \phi_n, \partial_\mu\phi_1, \ldots, \partial_\mu\phi_n)$. Weiterhin eine Lie-Gruppe G mit N kontinuierlichen Parametern $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \mathbb{R}$ unter der sich die Felder wie folgt transformieren

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix} \longrightarrow \underbrace{D(\alpha_1, \ldots, \alpha_N)}_{N\times N\text{-Matrix}} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \cdots \\ \phi_n \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \phi'_1 \\ \vdots \\ \phi'_N \end{pmatrix}$$

wobei die $N \times N$-Matrix D die infinitesimale Transformation darstellt

$$D(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon) = \mathbf{1} + \sum_{a=1}^{N} i\varepsilon_a T_a + \mathrm{O}\left(\varepsilon^2\right).$$

Dabei sind die Generatoren der Gruppe T_a $N \times N$-Matrizen. Die transformierten Felder nehmen somit folgende Form an

$$\phi_k' = \phi_k + i \sum_{a=1}^{N} \varepsilon_a (T_a)_{kl} \phi_l. \tag{2.1}$$

Sei nun $\mathcal{L}$ invariant unter G, d.h.

$$\mathcal{L}(\phi) = \mathcal{L}(\phi'),$$

dann gilt das **Noethertheorem**:

Sei $\mathcal{L}$ invariant unter einer N-parametrigen Lie-Gruppe G. Dann gilt, daß N Ströme j_μ^a, $(a = 1, \ldots, N)$ existieren mit der Eigenschaft, daß sie „erhalten" sind:

$$\partial^\mu j_\mu^a = 0 \quad (a = 1, \ldots, N).$$

Zum Beweis betrachte man „nach" einer infinitesimalen Transformation

$$\delta\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi') - \mathcal{L}(\phi) = 0$$
$$\delta\mathcal{L} = \sum_{k=1}^{N} \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_k}\delta\phi_k + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_k)} \cdot \partial_\mu(\delta\phi_k) \right\}$$

Setzt man nun als $\delta\phi_k$ die Differenz aus (2.1) ein und benutzt die Feldgleichungen, erhält man

$$\delta\mathcal{L} = \sum_a \underbrace{\varepsilon_a}_{\text{beliebig}} \partial_\mu \underbrace{\left\{ \sum_{k,l} i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_k)} \cdot T_{kl}^a \cdot \phi_l \right\}}_{=-j^{\mu,a}} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\longrightarrow j^{\mu,a} = -\sum_{k,l} i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_k)} \cdot T_{kl}^a \cdot \phi_l \quad \text{mit } \boxed{\partial_\mu j^{\mu,a} = 0}. \tag{2.2}$$

Aus dem Noethertheorem folgt also, daß es N erhaltene Ströem gibt und somit N erhaltene Ladungen

$$j_\mu^a,\ (q = 1m \ldots, N), \quad \text{mit } \partial_\mu j^{\mu,a} = 0$$
$$\longrightarrow Q^a = \int \mathrm{d}^3x\, j^{0,a}(\vec{x}, t) \quad \text{mit } \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} Q^a = 0$$

2.3 Spezielle Felder (freie Felder)

Wenn ein freies Feld vorliegt, bedeutet das, daß die Feldgleichungen linear sind. Demzufolge muß die Lagrange-Dichte bilinear in den Feldern ϕ_k und deren Ableitungen $\partial_\mu\phi_k$ sein.

2.3.1 Skalarfelder

Skalare Felder sind Felder, die unter einer Poincaré-Transformation in sich selbst übergehen

$$x' = \Lambda x + a \qquad \longrightarrow \qquad \boxed{\phi'(x') = \phi(x) = \phi\big(x(x')\big)}.$$

Betrachtet wird nun zuerst eine neutrales (reelles) und eine komplexes (geladenes) Skalarfeld

- neutrales Skalarfeld , d.h. $\phi^* = \phi$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - \frac{m^2}{2}\phi^2 \tag{2.3}$$

$$\longrightarrow \boxed{(\Box + m^2)\phi = 0} \qquad (\Box = \partial_\mu\partial^\mu). \tag{2.4}$$

Die sich ergebende Feldgleichung ist also die Klein-Gordon-Gleichung, welche durch einen Ansatz mit ebenen Wellen (und dann Überlagern als Fourierdarstellung) gelöst wird

$$\phi \sim e^{\pm ipx} \text{ mit } p_0 = +\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}.$$

Jetzt: Fourierdarstellung der allgemeinen Lösung

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{2p^0} \left\{ a(p) \cdot e^{-ipx} + a^*(p) \cdot e^{+ipx} \right\},$$

wobei $a(p)$ eine invariante Amplitudenfunktion sein soll.

- komplexes (geladenes) Skalarfeld Feld, d.h.: $\phi^* \neq \phi$, $\phi_1 = \Re\phi,\ \phi_2 = \Im\phi$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi_1) + \mathcal{L}(\phi_2) = (\partial_\mu\phi^*)(\partial^\mu\phi) - m^2\phi^*\phi = \mathcal{L}(\phi, \phi^*, \partial_\mu\phi, \partial^\mu\phi^*)$$

$$\longrightarrow \boxed{(\Box + m^2)\phi = 0 \qquad (\Box + m^2)\phi^* = 0}. \tag{2.5}$$

Man erhält also wieder Klein-Gordon-Gleichungen, die wie oben mit ebenen Wellen und Fourieransatz gelöst werden

$$\longrightarrow \phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{2p^0} \left\{ a(p) \cdot e^{-ipx} + b^*(p) \cdot e^{ipx} \right\}.$$

Die Lagrange-Dichte $\mathcal{L}$ hat eine kontinuiuerliche Symmetrie bezüglich der kontinuierlichen Gruppe $U(1)$ mit einem Parameter α (globale Phasentransformation)

$$\phi \to e^{i\alpha}\phi, \quad \phi^* \to e^{-i\alpha}\phi^*, \quad \alpha \in \mathbb{R} \text{ bel.}$$

Gemäß dem Noethertheorem folgt daraus, daß ein erhaltener Strom j^μ existiert (s. (2.2)).
Betrachtet man die inifinitesimale Transformation

$$\phi \to \phi' = (1 + i\varepsilon)\phi, \quad \phi^* \to \phi^{*\prime} = (1 + i\varepsilon)\phi^*,$$

so erhält man als Strom

$$j^\mu = i\big(\phi^*\partial^\mu\phi - \phi\partial^\mu\phi^*\big)$$

und als (erhaltene) Ladung

$$Q = \int \mathrm{d}^3x\, j^0(x), \quad \text{mit} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} Q = 0.$$

Betrachtet man nun wieder die Lagrange-Dichte $\mathcal{L}$, stellt man fest, daß diese invariant unter Transformationen $\phi \to \phi^*$ ist, die Ladung jedoch dabei ein entgegengesetztes Vorzeichen bekommt $Q \to -Q$.

Demnach sind die beiden Felder ϕ und ϕ^* zwei innere Freiheitsgrade, welche Teilsysteme mit entgegengesetzten Ladunge beschreiben.

Es stellt sich heraus, daß (bei vorhandener elektromagnetischer Wechselwirkung) der Strom j^μ dem e.m. Strom entspricht

2.3.2 Vektorfelder

Ein Vektorfeld A^μ transformiert sich unter einer Poincaré-Transformation $x' = \Lambda x + a$ wie folgt

$$A^{\mu\prime}(x') = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(x).$$

Aus der kovarianten Formulierung der klassischen Elektrodynamik ist z.B. das Vektorpotential $A^\mu = (A^0 = \phi, \vec{A})$ bekannt. Unter Verwendung des Feldstärke-Tensors

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

und der „üblichen“ Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \mathcal{L}(\partial^\mu A^\nu) \tag{2.6}$$

erhält man folgende Bewegungsgleichungen („Maxwell-Gleichungen“)

$$\partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \quad = 0 \iff \big(g_{\mu\nu}\Box - \partial_\mu \partial_\nu\big) A^\nu = 0,$$

welche (quantisiert) eine $m = 0$-Teilchen (z.B. ein Photon) beschreiben.

Für massive Felder kommt zur Lagrange-Dichte (2.6) noch ein Masse-Term hinzu

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{M^2}{2} A_\nu A^\nu, \quad M \neq 0. \tag{2.7}$$

In den Bewegungsgleichungen kommt ebenfalls ein Massterm hinzu. Man erhält die

$$\boxed{\big(g_{\mu\nu}(\Box + M^2) - \partial_\mu \partial_\nu\big) A^\nu = 0}. \quad \text{Proca-Gleichung.} \tag{2.8}$$

Als Folgerung ergibt sich (durch Kontraktion der obigen Gleichung mit ∂^ν)

$$\longrightarrow \partial_\mu A^\mu = 0 \quad \text{für } M \neq 0. \tag{2.9}$$

D.h. die Möglichkeit der Lorentz-Eichung besteht nun nicht mehr, sie ist vielmehr von vorneherein als Bedingung vorhanden.

Als Lösung der Proca-Gleichung wird eine ebene Welle angesetzt:

$$A^\nu(x) = \varepsilon^\nu(k) \cdot e^{\pm ikx}, \quad k^2 = M^2,\ k \cdot \varepsilon = 0. \tag{2.10}$$

(Der allgemeine Falle ergibt sich durch Fourier-Entwicklung nach diesen ebenen Wellen). Dabei ist $\varepsilon^\nu(k)$ ein raumartiger Polarisationsvektor, dessen Transversalität zu k sich aus der Fouriertransformation der Bedingung (2.9) ergibt. Aus (2.10) folgt, daß drei unabhängige Polarisationsvektoren $\varepsilon^\nu(\lambda), \lambda = 1,2,3$ existieren. Gibt man sich nun folgendes vor

$$\varepsilon^2 = -1,\ \varepsilon^\nu(\lambda) = \big(0, \vec{\varepsilon}(\lambda)\big),\ \lambda = 1,2,$$

so ergibt sich mit diesen „Definitionen“

$$\vec{\varepsilon} \cdot \vec{k} = 0, \quad \vec{\varepsilon}(\lambda) = 1 \text{ f. } \lambda = 1,2, \quad \vec{\varepsilon}(1) \cdot \vec{\varepsilon}(2) = 0, \quad \varepsilon^\mu(3) = \left(\frac{|\vec{k}|}{M}; \frac{k^0}{M} \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \right).$$

Für $M = 0$ erhält man aus der Proca-Gleichung wieder die optionale Lorentz-Eichung und statt (2.10)

$$A^\nu(x) = A^\nu(k) e^{\pm ikx} \quad \text{mit } k^2 A^\mu(k) - k^\mu k^\nu A_\nu = 0. \tag{2.11}$$

(2.11) gilt, wie man durch Einsetzen in (2.8) feststellen kann. Der allgemeinste Ansatz für obiges $A^\nu(k)$ ergibt sich aus der Linearkombination vierer Vektoren (den beiden Polarisationsverktoren und zwei weiteren, um die Basis im Minkowski-Raum zu vervollständigen):

$$A^\nu(k) = \sum_{\lambda=1,2} \varepsilon^\nu(\lambda) a_\lambda + \beta r^\nu + \gamma k^\nu,$$

mit $\alpha, \beta, a_1, a_2 \in \mathbb{C}$, also Zahlen. Der Vektor r^μ wird wie folgt konstruiert

$$(r^\mu) = (k^0, -\vec{k}), \quad r \cdot k = 0.$$

Setzt man dies in (2.11) ein, erhält man

$$(r \cdot k) k^\mu \beta = 0 \longrightarrow \beta = 0 \longrightarrow a_\lambda, \gamma \,\text{bel.}$$

Demnach ist also $A^\mu(k) \sim k^\mu$ immer eine Lösung, die aber unphysikalisch ist, da durch Eichtransformation reduzierbar:

Eichtransformation $A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \partial_\mu \phi(x)$
Fourier-Transf. $A_\mu(k) \to A_\mu(k) + k_\mu \phi(k)$

Man kann also einen beliebigen zu k^μ proportionalen Term addieren (also auch γk^μ).

Somit folgt letztlich, daß nur zwei physikalische Polarisationsvektoren $\varepsilon^\mu(\lambda)$ $\lambda = 1, 2$ übrigbleiben.

2.3.3 Dirac-Felder

Gegeben sei ein 4-komponentiger Dirac-Spinor $\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \vdots \\ \psi_4(x) \end{pmatrix}$, welcher die Dirac-Gleichung

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0$$

erfüllt. Weiterhin seien die Dirac-Matrizen (bzw. γ-Matrizen) $\gamma^\mu, \mu = 0, 1, 2, 3$ gegeben mit

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} := \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \tag{2.12}$$

Dabei bezeichnet $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}$ den *Antikommutator*. Desweiteren sei eine Matrix γ_5 wie folgt definiert

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3,$$

welche die Gleichung

$$\{\gamma^\mu, \gamma_5\} = 0 \quad \text{f. } \mu = 0, 1, 2, 3$$

erfüllt.In der Standard-Darstellung (Dirac-Darstellung)haben die γ-Matrizen folgende Form

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix}, \; \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix},$$

wobei $\mathbf{1}$ die Einheitsmatrix-Matrix in zwei Dimensionen ist und σ_k die Pauli-Matrizen[1]. Den adjungierten Spinor zu ψ erhält man aus

$$\overline{\psi} = \psi^+\gamma^0 = (\psi_1^*, \psi_2^*, -\psi_3^*, -\psi_4^*).$$

$\overline{\psi}$ ist so definert, daß das Produkt $\overline{\psi}\psi$ ein Skalar ist. Setzt man folgende Lagrange-Dichte voraus

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}\big(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\big)\psi = \sum_\alpha \overline{\psi}_\alpha \big(i(\gamma^\mu) - m\delta_{\alpha\beta}\big)\psi_\beta \tag{2.13}$$

$$= \mathcal{L}(\psi_\alpha, \overline{\psi}_\alpha, \partial_\mu\psi_\alpha) \tag{2.14}$$

erhält man als Feldgleichung die Dirac-Gleichung (wenn man nach $\overline{\psi}$ differenziert)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \overline{\psi}_\alpha} = 0 \longrightarrow \boxed{\big(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\big)\psi = 0}.$$

Durch Adungieren und Multiplikation mit γ_0 unter anschließender Benutzung von (2.12) oder einfach durch „Ableiten“ der Lagrange-Dichte nach ψ, erhält man die *adjungierte Dirac-Gleichung*

$$\boxed{\overline{\psi}\big(i\gamma^\mu\overleftarrow{\partial}_\mu + m\big) = 0}.$$

---

[1]

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \; \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \; \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Verhalten unter Lorentz-Transformationen

$$x' = \Lambda x : \quad \psi(x) \to \psi'(x') = S(\Lambda)\psi\big(x(x')\big),$$

mit der (4×4)-Matrix

$$S(\Lambda) = e^{-(i/2)\cdot w^{\mu\nu}S_{\mu\nu}} \qquad \text{inf.} \; = \mathbf{1} - \frac{i}{2} w^{\mu\nu} S_{\mu\nu},$$

wobei $w_{\mu\nu} = -w_{\nu\mu}$ sechs Komponenten enthält, die die Lorentz-Transformation definieren (d.h., die infinitesimalen Parameter der Gruppe) und

$$S_{\mu\nu} = \frac{i}{4}\left[\gamma_\nu, \gamma_\nu\right] \longrightarrow S^{-1} = \gamma^0 S^+ \gamma^0 \longrightarrow \overline{\psi}' = \overline{\psi} \cdot S^{-1}.$$

Es gilt

$$\boxed{S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu},$$

(d.h., die Spinor-Matrizen γ^μ transformieren sich wie ein 4-Vektor), woraus sich dann die Invarianz der Lagrange-Dichte ergibt

$$\longrightarrow \overline{\psi}(i\gamma^\mu \partial'_\mu - m)\psi' = \overline{\psi}(S^{-1} i\gamma^\mu S \partial'_\mu - m)\psi = \overline{\psi}(i\Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\mu \partial'_\mu - m)\psi = \overline{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\nu - m)\psi.$$

Die Invarianten (Kovarianten), die man sich konstruieren kann, lauten folgendermaßen

$$\overline{\psi}\psi : \;\text{Skalar} \qquad\qquad \overline{\psi}\gamma^\mu\psi : \;\text{Vektor}$$

$$\overline{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi : \;\text{Tensor 2. Stufe} \qquad\qquad \text{mit } \sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\left[\gamma^\mu, \gamma^\nu\right].$$

Weiterhin ist $\overline{\psi}\gamma_5\psi$ eine Pseudoskalar, welcher bei (Raum)-Spiegelungen ein Minuszeichen bekommt und $\overline{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi$ ein Pseudovektor.

Somit hat man mit

$$\Lambda, \gamma^\mu, \sigma^{\mu\nu}, \gamma_5, \gamma^\mu\gamma_5$$

16 unabhängige (4×4)-Matrizen.

Die Lagrange-Dichte weist wieder eine kontinuierliche Symmetrie unter globalen Phasentransformationen (Gruppe $U(1)$) auf

$$\psi \to e^{i\alpha}\psi, \quad \overline{\psi} \to e^{-i\alpha}\overline{\psi}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

woraus sich wie gehabt gemäß dem Noethertheorem (s. (2.2)) ein erhaltener Strom ergibt (Die Erzeugenden der globalen U(1) sind dabei **1**-Operatoren).

$$\longrightarrow \boxed{j^\mu = \overline{\psi}\gamma^\mu\psi}, \qquad \partial_\mu j^\mu = 0.$$

Dabei handelt es sich um den elektromagnetischen Strom.

Lösungen der Dirac-Gleichung

Man erhält zwei unabhängige Lösungen der Dirac-Gleichung

1. $\psi(x) = e^{-ipx} \cdot u(p),\; p^0 = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$: setzt man dies in die Dirac-Gleichung ein, erhält man

   $$\longrightarrow (\not{p} - m)u(p) = 0 \longrightarrow 2 \text{ lin. unabh. Lsg. } u_r(p),\; r = 1, 2$$

   Dabei bedeutet

   $$\not{p} := \gamma^\mu p_\mu, \quad \text{allg.}: \; \boxed{\not{a} := a_\mu \gamma^\mu}.$$

2. $\psi(x) = e^{+ipx} v(p),\ p^0 = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$: Einsetzen liefert

$$\longrightarrow (\not{p} + m) v(p) = 0 \longrightarrow 2 \text{ unabh. Lsg } v_r(p),\ r = 1,2$$

Sofern die Normierung der Funktionen $u_r(p)$ und $v_r(p)$ geeignet gewählt wurde, ergeben sich folgende Eigenschaften (Übung)

$$\begin{aligned} &\overline{u}_r(p) u_{r'}(p) = \delta_{rr'} \cdot 2m \qquad \overline{v}_r(p) v_{r'}(p) = \delta_{rr'} \cdot 2m \qquad \overline{u} v = \overline{v} u = 0 \\ &\sum_r v_r \overline{v}_r = \not{p} - m \qquad \sum_r u_r \overline{u}_r = \not{p} + m \\ &\boxed{u_r^+(p) u_{r'}(p) = v_r^+(p) v_{r'}(p) = \delta_{rr'} \cdot 2p^0} \end{aligned} \tag{2.15}$$

Die allgemeine Lösung der Dirac-Gleichung erhält man als Fourier-Entwicklung

$$\boxed{\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{2p^0} \sum_{r=1}^{2} \left\{ c_r(p) u_r(p) e^{-ipx} + d_r^*(p) v_r(p) e^{+ipx} \right\}}. \tag{2.16}$$

Ladungskonjugation:

Betrachtet wird die Symmetrie der Lagrange-Dichte $\mathcal{L}$, die unter der Transformation

$$C: \quad \psi \to \psi^C = C\overline{\psi}^T, \qquad C = i\gamma^2\gamma^0 \text{ wählbar.}$$

invariant bleibt. Daraus ergibt sich

$$\longrightarrow C\overline{u}^T = v, \qquad C\overline{v}^T = u.$$

Kapitel 3

Quantisierte freie Felder

Die Quantisierung von Felder läuft darauf hinaus, daß aus den klassischen Feldern Operatoren auf dem Fock-Raum mit kanonischen Vertauschungsrelationen werden (bzw. im Falle des Dirac-Feldes Anti-Vertauschungsregeln).

In der „klassischen“ Quantenmechanik gelten die Vertauschungsregeln zwischen den Orts- und Impulsoperatoren, welche im Heisenberg-Bild zusätzlich zeitabhängig sind ($Q_l = Q_l(t);\ P_l = P_l(t)$).

$$[Q_l, Q_k] = [P_l, P_k] = 0, \quad [Q_l, P_k] = i\delta_{lk}.$$

3.1 Skalarfelder

3.1.1 relle Felder

Relle Felder bedeutet hier: $\phi = \phi^+$. Die Lagrange-Dichte wird aus dem klassischen übernommen

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - \frac{m^2}{2}\phi^2,$$

der kanonische Impuls berechnet sich nach

$$\Pi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi)} = \partial^0\phi = \Pi(x).$$

Die Quantisierung besteht nun darin, die Felder in Operatoren zu überführen

$$\begin{aligned} \phi(x) &\to \text{Operator } \phi(x) = \phi(\vec{x}, t),\ \phi^+ = \phi \\ \Pi(x) &\to \text{Operator } \Pi(x) = \Pi(\vec{x}, t),\ \Pi^+ = \Pi. \end{aligned}$$

Man postuliert nun die kanonischen Vertauschungsregeln analog den klassischen

$$[\phi(\vec{x}, t), \phi(\vec{x}', t)] = [\Pi(\vec{x}, t), \Pi(\vec{x}', t)] = 0 \qquad [\phi(\vec{x}, t), \Pi(\vec{x}', t)] = i \cdot \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}'). \tag{3.1}$$

Die Feldgleichungen (2.4) gehen über in Operator-Differentialgleichungen

$$(\Box + m^2)\phi = 0,$$

woraus folgt, daß $\phi(x)$ nach ebenen Wellen $e^{\pm ipx}$ entwickelbar ist mit Operatoren a, a^+ als Koeffizienten:

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{2p^0}\left(a(p) \cdot e^{-ipx} + a^+(p) \cdot e^{ipx}\right), \tag{3.2}$$

$$\Pi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{2p^0}\left(-ip^0 a(p) \cdot e^{-ipx} + ip^0 a^+(p) \cdot e^{ipx}\right). \tag{3.3}$$

Man sieht leicht, daß $\phi = \phi^+$ gilt.

Mit diesen ϕ bzw. Π sind die kanonischen Vertauschungsregeln erfüllt, wenn folgende Bedingung an die Koeffizienten a, a^+ erfüllt ist

$$\boxed{\begin{aligned}&[a(p), a(p')] = [a^+(p), a^+(p')] = 0\\ &[a(p), a^+(p')] = 2p^0 \cdot \delta^3(\vec{p} - \vec{p}\,')\end{aligned}}, \tag{3.4}$$

welche äquivalent zu den VR von ϕ und Π sind. Für festes $\vec{p}$ entsprechen diese Definitionen denen des harmonischen Oszillators.

Hamilton-Operator

$$\begin{aligned}H &= \int d^3x\, \mathcal{H} = \int d^3x(\Pi \cdot \partial^0\phi - \mathcal{L}) = \frac{1}{2}\int d^3x \left(\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 + (\vec{\nabla}\phi)^2 + m^2\phi^2\right)\\ &\overset{(3.2)}{=} \frac{1}{2}\int \frac{d^3p}{2p^0} p^0(p)\big(a^+(p)a(p) + a(p)a^+(p)\big) = \int \frac{d^3p}{2p^0} p^0 \left(a^+(p)a(p) + \frac{1}{2}\right).\end{aligned}$$

Es folgt ein kleiner Einschub, wobei der Energie-Impuls-Tensor betrachtet wird. Gegeben sei eine Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi)$$

für eine reelles Skalarfeld. Dann erhält man den Energie-Impuls-Tensor via

$$T^{\mu\nu} := \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial^\nu\phi - g^{\mu\nu}\cdot\mathcal{L}.$$

Man erhält (durch Differentiation und Benutzung der Feldgleichung) folgende Erhaltungseigenschaft

$$\boxed{\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0}.$$

Daraus folgt mit

$$p^\nu = \int d^3x\, T^{0\nu} \longrightarrow \frac{dp^\nu}{dt} = 0.$$

Aus der Nullkomponente erhält man

$$\begin{aligned}p^0 &= \int d^3x\, T^{00} = \int d^3x\, \mathcal{H} = H\\ p^k &= \int d^3x\, T^{0k} = \int d^3x\, \Pi\partial^k\phi = -\int d^3x\, \Pi \cdot \vec{\nabla}\phi.\end{aligned}$$

Der Impulsoperator ist also

$$\vec{P} = -\int d^3x\, \Pi\vec{\nabla}\phi = \frac{1}{2}\int \frac{d^3p}{2p^0}\vec{p}\big(a^+(p)a(p) + a(p)a^+(p)\big).$$

Äquivalenz zum HO der Quantenmechanik

Die dreidimensionalen Integrale werden zu Summationen über Volumenelemente, die Delta-Funktionen zu Kronecker-Deltas, man geht also über zu einem endlichen Volumen, woraus sich letzlich diskrete Zustände ergeben

$$\int d^3p \longrightarrow \sum_{\vec{p}} \Delta v_{\vec{p}} \qquad \delta^3(\vec{p} - \vec{p}\,') \longrightarrow \delta_{\vec{p}\vec{p}'} \cdot \frac{1}{\Delta v_{\vec{p}}}$$

Und somit

$$
\begin{aligned}
a(p) &\longrightarrow a_{\vec{p}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\nu_{\vec{p}}}}, \qquad \omega_{\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \\
\mathrm{VR} &\longrightarrow [a_{\vec{p}}, a_{\vec{p}'}] = \left[a^+_{\vec{p}}, a^+_{\vec{p}'}\right] = 0, \qquad \left[a_{\vec{p}}, a^+_{\vec{p}'}\right] = \delta_{\vec{p}\vec{p}'} \\
H &\longrightarrow \sum_{\vec{p}} \frac{1}{2}\left(a^+_{\vec{p}} a_{\vec{p}} + a_{\vec{p}} a^+_{\vec{p}}\right) \cdot \omega_{\vec{p}} \qquad (3.5) \\
&= \sum_{\vec{p}} \omega_{\vec{p}} \Big(\underbrace{a^+_{\vec{p}} a_{\vec{p}}}_{=N_{\vec{p}}} + \frac{1}{2}\Big) \equiv \sum_{\vec{p}} H_{\vec{p}} \qquad (3.6)
\end{aligned}
$$

D.h., für jedes feste $\vec{p}$ hat man einen harmonischen Oszillator mit der Frequenz $\omega_{\vec{p}}$

$$
\begin{aligned}
H_{\vec{p}}\big|n_{\vec{p}}\big\rangle &= \Big(n_{\vec{p}} + \frac{1}{2}\Big)\omega_{\vec{p}}\big|n_{\vec{p}}\big\rangle, \quad n_{\vec{p}} = 0, 1, 2, \ldots \\
a^+_{\vec{p}}\big|n_{\vec{p}}\big\rangle &= \sqrt{n_{\vec{p}} + 1}\big|n_{\vec{p}} + 1\big\rangle \qquad \text{„Erzeuger“} \\
a_{\vec{p}}\big|n_{\vec{p}}\big\rangle &= \sqrt{n_{\vec{p}}}\big|n_{\vec{p}} - 1\big\rangle \qquad \text{„Vernichter“} \\
\text{speziell: } a^+_{\vec{p}}\big|0\big\rangle &= \big|n_{\vec{p}} = 1\big\rangle; \quad a_{\vec{p}}\big|0\big\rangle = 0 \\
\big|n_{\vec{p}}\big\rangle &= \frac{1}{\sqrt{n_{\vec{p}}!}}\left(a^+_{\vec{p}}\right)^{n_{\vec{p}}}\big|0\big\rangle.
\end{aligned}
$$

Der Gesamt-Hamilton ergibt sich aus der Summe der Hamiltons der einzelnen (untereinander nicht wechselwirkenden) Teilsysteme

$$H = \sum_{\vec{p}} H_{\vec{p}}.$$

Die Eigenzustände von H sind somit die Produktzustände

$$\big|n_{\vec{p}_1}, n_{\vec{p}_1}, \ldots\big\rangle = \prod_{\vec{p}}\big|n_{\vec{p}}\big\rangle \qquad (3.7)$$

zu den Eigenwerten $\sum_{\vec{p}}(n_{\vec{p}} + \frac{1}{2}\omega_{\vec{p}})$. Der Grundzustand ist der Produktzustand bestehend aus Nullvektoren

$$\big|0\big\rangle = \big|0\big\rangle\big|0\big\rangle\big|0\big\rangle \ldots$$

Analog geht man für den Impuls vor und erhält

$$\vec{P} = \sum_{\vec{p}}\Big(N_{\vec{p}} + \frac{1}{2}\Big) \cdot \vec{p}, \qquad (3.8)$$

woraus folgt, daß (3.7) auch Eigenzustand zu $\vec{p}$ ist und zwar zum Eigenwert

$$\vec{p}\big|n_{\vec{p}_1}, n_{\vec{p}_1}, \ldots\big\rangle = \vec{p}\prod_{\vec{p}}\big|p\big\rangle = \sum_{\vec{p}}(n_{\vec{p}} + \frac{1}{2})\vec{p}\big|n_{\vec{p}_1}, n_{\vec{p}_1}, \ldots\big\rangle.$$

Wäre in (3.8) das $1/2$ weg, so wäre $p^2 + m^2 = \omega^2_{\vec{p}}$, die Quanten würden also die Massenschalenbedingung für freie Teilchen der Masse m erfüllen.

Der Zustandsraum ist der Fockraum für spinlose Teilchen mit der Masse m. Sind die Zustände symmetrisch, handelt es sich bei den Teilchen um Bosonen.

Vernichter bzw. Erzeuger wirken folgendermaßen

$$
\begin{aligned}
a^+_{\vec{p}}\big|0\big\rangle &= \big|\vec{p}\big\rangle \qquad \text{1-Teilchenzust. zum Impuls } p, p^2 = m^2 \\
a_{\vec{p}}\big|\vec{p}'\big\rangle &= \delta_{\vec{p}\vec{p}'}\big|0\big\rangle,
\end{aligned}
$$

d.h. a und a^+ sind Vernichter und Erzeuger von Teilchen mit Impuls $\vec{p}$.

In den bisherigen Überlegungen tritt ein Problem auf. Und zwar handelt es sich dabei um das $1/2$ in den Summen, wodurch diese letztlich divergieren

$$\begin{aligned} H\left|0\right\rangle &= \left|0\right\rangle \sum_{\vec{p}} \omega_{\vec{p}} \cdot \tfrac{1}{2} \to \infty \\ \vec{p}\left|0\right\rangle &= \left|0\right\rangle \sum_{\vec{p}} \vec{p} \cdot \tfrac{1}{2} \to \infty. \end{aligned}$$

Dadurch werden die Energie- $\left\langle 0\middle|H\middle|0\right\rangle$ und Impuls-Vakuumserwartungswerte $\left\langle 0\middle|\vec{P}\middle|0\right\rangle$ unphysikalisch und aus diesem Grund subtrahiert.

$$p^\nu = p^\nu - \left\langle 0\middle|p^\nu\middle|0\right\rangle.$$

Formal geschieht dies durch die *Normalordnung*, welche eine (angeblich unschöne) Vorschrift ist, alle Erzeuger stets links von den Vernichtern zu schreiben. Allerdings ist dabei zu beachten, daß man dies nicht „irgendwann“ tut, sondern dann, wenn es sinnvoll ist. Z.B. ist es nicht sinnvoll Normalordnung in (3.6) anzuwenden, weil dort das „verhängnisvolle“ $1/2$ bereits vorhanden ist, sondern schon davor in (3.5)!

Die normalgeordneten Operatoren bekommen üblicherweise ein zweifaches Doppelpunkt-Symbol:

$$:\phi(x)\phi(y):, \qquad :N_{\vec{p}}:, \qquad \text{usw.} \tag{3.9}$$

Geht man zum Kontinuum über, so ist

$$\begin{aligned} P^\mu &= \int \frac{d^3p}{2p^0} p^\mu a^+(p)a(p) \\ a^+(p)\left|0\right\rangle &= \left|\vec{p}\right\rangle, \quad a(p)\left|\vec{p}\,'\right\rangle = 2p^0\delta^3(\vec{p}-\vec{p}\,')\left|0\right\rangle, \end{aligned}$$

wobei der Faktor $2p^0$ aus Normierungsgründen steht, denn

$$\left\langle p'\middle|p\right\rangle = 2p^0 \cdot \delta^3(\vec{p}-\vec{p}\,') = \left\langle 0\middle|a(p')a^+(p)\middle|0\right\rangle.$$

Ein andere Zugang zum Thema Quantisierung ist, daß man vom Fockraum für Teilchen der Masse m ausgeht und a, a^+ als Erzeuger/Vernichter von Teilchen definiert und weiterhin kanonische Vertauschungsregeln für a, a^+ fordert. Man erhält auch

$$\phi(\vec{x},t) := \int \frac{d^3p}{2p^0}\left(a(p)^{-ipx} + a^+(p)e^{ipx}\right),$$

dabei sind Kausalität, Lokalität, und kanon. VR für die Felder erfüllt.

3.1.2 Komplexes Skalarfeld

Das Quantenfeld wird nun durch einen Operator $\phi^+ \not\phi$ ausgedrückt. Die Feldgleichungen (s Gl. (2.5))

$$\left(\Box + m^2\right)\phi = 0$$

hatten die Lösung (durch Fourierentwicklung)

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3p}{2p^0}\left(a(p)e^{-ipx} + b^+(p)e^{ipx}\right) \qquad a \neq b.$$

Und mit $\phi_1 = \Re\phi, \phi_2 = \Im\phi$ ergaben sich die kanonischen Impulse zu

$$\Pi_j = \partial^0\phi_j, \; j = 1, 2.$$

Der Hamilton-Operator ist

$$\mathcal{H} = \sum_{j=1}^{2} \Pi_j \partial^0 \phi_j - \mathcal{L}, \qquad H = \int \mathrm{d}^3 x\, \mathcal{H}.$$

Fordert man jetzt wieder kanonische Vertauschungsregeln, so erhält man als VR für a, b

$$\begin{aligned} [a,a] = [b,b] = \left[a^+, a^+\right] = \left[b^+, b^+\right] = 0 \;\forall p, p' \\ [a,b] = \left[a, b^+\right] = 0, \quad \left[a(p), a^+(p')\right] = 2p^0 \delta^3(\vec{p} - \vec{p}\,') \\ \left[b(p), b^+(p')\right] = 2p^0 \delta^3(\vec{p} - \vec{p}\,'). \end{aligned}$$

Somit ergibt sich folgender Hamilton- bzw. Impuls-Op.

$$H = \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{2p^0} \big(\underbrace{a^+(p) a(p)}_{=N_+(p)} + \underbrace{b^+(p) b(p)}_{=N_-(p)}\big) \cdot p^0$$

$$\vec{P} = \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{2p^0} \vec{p} \big(N_+(p) + N_-(p)\big)$$

Es handelt sich also um ein Quantenteilchen mit Impuls p^μ auf der Massenschale, d.h. $p^2 = m^2$. Es ist zu beachten, daß man wieder Normalordnung beachtet bzw. die entsprechenden Vakuumerwartungswerte $\langle 0 | P^\mu | 0 \rangle$ abzieht.

$\mathcal{L}$ ist wieder symmetrisch bzgl. $U(1)$, demnach gibt es nach Noether (s. (2.2)) wieder einen erhaltenen Strom und eine erhaltene Ladung (beachte: $\mathcal{L}$ mit reellen Skalarfelder ist *nicht* U(1)-invariant, da die Transformationen komplex sind).

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \qquad j^\mu = i(\phi^+ \partial^\mu \phi - (\partial^\mu \phi^+)\phi \quad \text{(Normalord.)}$$

$$Q = \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{2p^0} \big(N_+(p) - N_-(p)\big)$$

Die Teilchen zum Impuls p^μ tragen zwei verschiedene Ladungen

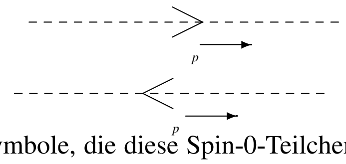
$$a^+(p)|0\rangle = |+, p\rangle \qquad b^+(p)|0\rangle = |-, p\rangle$$
$$P^\mu |\pm, p\rangle = p^\mu |\pm, p\rangle \qquad Q|\pm, p\rangle = \pm|\pm, p\rangle,$$

d.h., die Teilchenzustände sind auch Ladungseigenzustände zu den Eigenwerten $Q = \pm 1$. Man bezeichnet konventionsgemäß mit

$|+, p\rangle$ Teilchenzustände
$|-, p\rangle$ Anti-Teilchenzustände

Die 1-Teilchenwellenfunktionen erhält man durch Berechnung der 1-Teilchen-Vakuum-Amplitude:

$$\langle 0 | \phi(x) | +, p \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-ipx} \tag{3.10}$$
$$\langle -, p | \phi(x) | 0 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{ipx}$$



Bei den Grafiken handelt es sich um die Symbole, die diese Spin-0-Teilchen im Feynmangraphen haben, der Pfeil gibt die Richtung des Ladungsflusses an.

3.2 Dirac-Feld

Die 1-Teilchenzustände lauten für Teilchen der Ladung e^- bzw. Anti-Teilchen der Ladung e^+

$$|e^-, p\sigma\rangle, \qquad |e^+, p\sigma\rangle,$$

wobei σ die Spinkomponenten bzgl. einer festen Richtung ist (z.B. in Richtung des Impulses $\vec{p} \longrightarrow$ Helizität). Diese 1-Teilchenzustände werden wie folgt aus dem Vakuum erzeugt

$$|e^-, p\sigma\rangle = c_\sigma^+(p)|0\rangle; \qquad |e^+, p\sigma\rangle = d_\sigma^+(p)|0\rangle,$$

wobei

$$\begin{aligned} c_\sigma(p) = \left(c_\sigma^+(p)\right)^+ \qquad d_\sigma(p) &= \left(d_\sigma^+(p)\right)^+ \\ c_\sigma(p)|e^-, p'\sigma'\rangle &= \delta_{\sigma\sigma'} \cdot 2p^0 \cdot \delta^3 \vec{p} - \vec{p}'|0\rangle \\ d_\sigma(p)|e^+, p'\sigma'\rangle &= \delta_{\sigma\sigma'} \cdot 2p^0 \cdot \delta^3 \vec{p} - \vec{p}'|0\rangle \end{aligned}$$

Wegen des Pauli-Prinzips gehen die Kommutatoren in Antikommutatoren über, so daß gilt

$$\begin{aligned} \left\{c_\sigma(p), c_{\sigma'}^+(p')\right\} &= \delta_{\sigma\sigma'} 2p^0 \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \\ \left\{d_\sigma(p), d_{\sigma'}^+(p')\right\} &= \delta_{\sigma\sigma'} 2p^0 \delta^3(\vec{p} - \vec{p}'). \end{aligned} \tag{3.11}$$

Die restlichen (Anti-)Kommutatoren verschwinden. Obige Gleichungen sind als Postulat zu verstehen. Mit dem Pauli-Prinzip folgt, daß die Mehrteilchenzustände

$$c_{\sigma_1}^+(p_1) \ldots c_{\sigma_n}(p_n)|0\rangle, \text{ usw.}$$

total antisymmetrisch sind.

Dirac-Feld

$\psi(x)$ sei die Lösung der Dirac-Gleichung $(i\partial\!\!\!/ - m)\psi = 0$

$$\longrightarrow \psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{2p^0} \sum_{\sigma=1}^{2} \left(c_\sigma(p) u_\sigma(p) e^{-ipx} + d_\sigma^+(p) v_\sigma(p) e^{ipx}\right).$$

Den kanonischen Impulse erhält man durch Ableiten der Lagrange-Dichte zu

$$\Pi_\beta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \psi_\beta)} = i\overline{\psi}_\alpha \gamma^0_{\alpha\beta} = i\psi_\beta^+.$$

Somit kann man die „kanonischen Anti-VR“ zwischen Feld und Impuls unter Benutzung der c, d-Algebra (3.11) berechnen

$$\Big\{\psi_\alpha(\vec{x}, t), \underbrace{\Pi_\beta(\vec{x}, t)}_{=i\psi_\beta^+}\Big\} = i\delta^3(\vec{x} - \vec{x}')\delta_{\alpha\beta}$$

(Rest Null für $t = t'$).

Energie-Impuls-Tensor

$$T^{\mu\nu} = \sum_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi_\alpha)} \partial^0 \psi_\alpha - g^{\mu\nu} \mathcal{L}.$$

Via Noethertheorem oder direkt kann man berechnen, daß der Energie-Impuls-Tensor erhalten ist.

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$$

$$\longrightarrow P^\nu = \int \mathrm{d}^3 x\, T^{0\nu} \qquad \text{4-Impuls} \tag{3.12}$$

$$P^0 = \int \mathrm{d}^3 x\, T^{00} = \int \mathrm{d}^3 x \sum_\alpha \Pi_\alpha \partial^0 \psi_\alpha - \mathcal{L} = \int \mathrm{d}^3 x\, \mathcal{H} = H \tag{3.13}$$

$$\vec{P} = \int \mathrm{d}^3 x\, \psi^+ (-i\vec{\nabla}) \psi. \tag{3.14}$$

H läßt sich unter Benutzung der Dirac-Gleichung als

$$H = \int \mathrm{d}^3x\, \psi^+ i \frac{\partial}{\partial t} \psi$$

schreiben, womit man, wenn man die Felder einsetzt, folgendes erhält

$$H = \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{2p^0} \sum_\sigma \big(\underbrace{c_\sigma^+(p) c_\sigma(p)}_{=N_\sigma^+(p)} + \underbrace{d_\sigma^+(p) d_\sigma(p)}_{=N_\sigma^-(p)} \big) p^0.$$

$$\vec{P} = \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{2p^0} \sum_\sigma \big(N_\sigma^+(p) + N^-{}_\sigma(p) \big) \vec{p}.$$

Damit wäre gemäß (3.13) und (3.14) der Impulsoperator P^μ bestimmt, welcher auf die Teilchenzustände angewandt den Eigenwert p^μ produziert

$$P^\mu \big| e^\pm, p\sigma \big\rangle = p^\mu \big| e^\pm, p\sigma \big\rangle.$$

Es gibt wieder einen erhaltenen Strom $j^\mu = \overline{\psi}\gamma^\mu\psi$ und damit eine erhaltene Ladung Q

$$Q = \int \mathrm{d}^3x\, j^0(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{2p^0} \sum_\sigma \big(N_\sigma^+(p) - N_\sigma^-(p) \big) \qquad [Q, H] = 0$$

Wendet man diese Ladungsoperator auf die Eigenzustände an, so erhält man

$$Q \big| e^\pm, p\sigma \big\rangle = \mp \big| e^\pm, p\sigma \big\rangle,$$

für e^- gibts also (konventionsgemäß) eine $+1$ als Eigenwert!

Drehimpuls

Die Drehimpulsoperator-Dichte ist gegegeben durch

$$M^{\rho\mu\nu} = i\overline{\psi}\gamma^\rho \Big(x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu + \frac{1}{i} S^{\mu\nu} \Big) \psi \quad \text{mit } S^{\mu\nu} = \frac{i}{4} \left[\gamma^\mu, \gamma^\nu \right].$$

Durch „direktes“ Nachrechnen (oder via Noethertheorem mit $\mathcal{L} = \overline{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi)$ erhält man, daß folgende Größe $M^{\rho\mu\nu}$ erhalten ist (Übung)

$$\partial_\rho M^{\rho\mu\nu} = 0,$$

woraus dann folgt, daß

$$\longrightarrow \int \mathrm{d}^3x\, M^{0\mu\nu} =: M^{\mu\nu} \text{ erhalten} \qquad \longrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} M^{\mu\nu} = 0.$$

Und mit

$$\vec{J} := \big(M^{23}, M^{31}, M^{12} \big)$$

ist also der sp definierte Drehimpuls $\vec{J}$ erhalten,

$$\vec{J} = \int \mathrm{d}^3x\, \psi^+ \left(\vec{x} \times \frac{1}{i} \vec{\nabla} + \frac{1}{i} \vec{\Sigma} \right) \psi, \qquad \vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}.$$

Somit ist $\left[\vec{J}, H \right] = 0$. Der Helizitäts-Operator ergibt sich durch Projektion des Dehimpulses auf die Impulsrichtung

$$W := \frac{\vec{J} \cdot \vec{P}}{|\vec{P}|}$$

$$W \big| e^\pm, p\sigma \big\rangle = \int \mathrm{d}^3x\, \psi^+ \frac{1}{2} \frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{P}}{|\vec{P}|} \psi \big| e^\pm, p\sigma \big\rangle.$$

a) Teilchenzustände
Mit $\vec{n} := \vec{P}/|\vec{P}|$ ist

$$
\begin{aligned}
(\vec{J}\cdot\vec{n})\big|e^-,p\sigma\big\rangle &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \mathrm{d}^3x \int \frac{\mathrm{d}^3k}{2k^0}\int \frac{\mathrm{d}^3k'}{2k'^0} e^{i(k-k')x}\cdot \\
&\quad \sum_{\lambda=1,\lambda'=1}^{2,2} u_\lambda^+(k)\left(\frac{1}{2}\vec{\Sigma}\cdot\vec{n}\right) u_{\lambda'}(k')\,\underbrace{c_\lambda^+(k)c_{\lambda'}(k')\big|e^-,p\sigma\big\rangle}_{2k'^0\delta_{\lambda'\sigma}\delta^3(\vec{p}-\vec{k})|e^-,k\lambda\rangle} \\
&= \frac{1}{2p^0}\sum_\lambda u_\lambda^+(p)\left(\frac{1}{2}\vec{\Sigma}\cdot\vec{n}\right) u_\sigma(p)\big|e^-,p\lambda\big\rangle
\end{aligned}
$$

Fordert man nun, daß der Spinor $u_\sigma(p)$ Eigenvektor der Helizität $\vec{\Sigma}\cdot\vec{n}$ ist, welche die Eigenwerte $\sigma = \pm 1$ hat

$$
(\vec{\Sigma}\cdot\vec{n})u_\sigma(p) = \sigma u_\sigma(p) \longrightarrow \sigma = \pm 1, \tag{3.15}
$$

folgt

$$
\frac{\vec{J}\cdot\vec{P}}{|\vec{P}|}\big|e^-,p\sigma\big\rangle = \frac{1}{2p^0}\sum_\lambda \underbrace{u_\sigma(p)u_\sigma(p')}_{=\delta_{\lambda\sigma}\cdot 2p^0}\frac{\sigma}{2}\,\big|e^-,p\lambda\big\rangle = \frac{\sigma}{2}\big|e^-,p\sigma\big\rangle.
$$

Somit ist also gezeigt, daß $\big|e^-,p\sigma\big\rangle$ Eigenzustand des Helizitäts-Operators (unter obigen Bedingungen) ist.

Der Helizitäts-Operator nimmt – kovariant geschrieben – folgende Form an (Übung)

$$
\vec{\Sigma}\cdot\frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} = \gamma_5 \not{S}\frac{\not{p}}{m} \quad \text{mit } (S^\mu) = \frac{1}{m}\left(|\vec{p}|, p^0\cdot\frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}\right),\ S^2 = -1,\ S\cdot p = 0. \tag{3.16}
$$

Wegen der Dirac-Gleichung $(\not{p}-m)u_\sigma(p) = 0\ \forall\sigma$ folgt $\frac{\not{p}}{m}u = u$ und damit

$$
\longrightarrow \gamma_5\not{S}\frac{\not{p}}{m}u_\sigma(p) = \gamma_5\not{S}u_\sigma(p),
$$

was letztlich zu

$$
\longrightarrow \boxed{\left(\vec{\Sigma}\cdot\frac{\vec{P}}{|\vec{p}|}\right)u_\sigma(p) = \gamma_5\not{S}u_\sigma(p)}
$$

führt.

b: Anti-Teilchen-Zustände
Wendet man den Helizitäts-Operator $W = \vec{J}\cdot\vec{n}$ auf den Zustand mit „reziproker Ladung“ an, erhält

man

$$
\begin{aligned}
W\left|e^+,p\sigma\right\rangle &= \int \mathrm{d}^3x :\psi^+\left(\frac{1}{2}\vec{\Sigma}\cdot\vec{n}\right)\psi: \left|e^+,p\sigma\right\rangle \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \mathrm{d}^3x \int\frac{\mathrm{d}^3k}{2k^0}\int\frac{\mathrm{d}^3k'}{2k'^0}e^{-i(k-k')x} \\
&\quad \cdot \sum_{\lambda,\lambda'} v_\lambda^+(k)\left(\frac{1}{2}\vec{\Sigma}\cdot\vec{n}\right)v_{\lambda'}(k')\underbrace{:d_\lambda(k)d_{\lambda'}^+(k):\left|e^+,p\sigma\right\rangle}_{=-2k^0\delta_{\lambda\sigma}\delta^3(\vec{k}-\vec{p})|e^+,k'\lambda\rangle} \\
&= \frac{1}{2p^0}\sum_\lambda \underbrace{v_\sigma^+(p)\overbrace{\left(-\frac{1}{2}\vec{\Sigma}\cdot\vec{n}\right)v_{\lambda'}}^{=\frac{1}{2}\lambda' v_{\lambda'}(p)}}_{=2p^0\delta_{\sigma\lambda'}}\left|e^+,\lambda\sigma\right\rangle \\
&= \sigma\left|e^+,p\sigma\right\rangle; \qquad \sigma=\pm\frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Fordert man nun wieder, daß (analog zu (3.15)) folgende Gleichung gilt

$$
(-\vec{\Sigma}\cdot\vec{n})v_\sigma(p) = \sigma\cdot v_\sigma(p), \quad \sigma=\pm 1,
$$

und somit

$$
(-\vec{\Sigma}\cdot\vec{n}) \overset{(3.15)}{=} -\gamma_5 \not{S}\frac{\not{p}}{m}; \quad -\gamma_5\not{S}\frac{\not{p}}{m}v_\sigma(p) = +\gamma_5\not{S}v_\sigma(p),
$$

da gilt $(\not{p}+m)v_\sigma(p)=0$ (Dirac-Gleichung). Somit

$$
\longrightarrow \boxed{-\vec{\Sigma}\cdot\frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}v_\sigma(p) = \gamma_5\not{S}v_\sigma(p)} \quad \sigma=\pm1 \Leftrightarrow \text{Helizität } \frac{1}{2} \text{ f. } e^\pm.
$$

Die Schreibweise für die Spinoren der jeweiligen Helizität bzw. des jeweiligen Spins hat sich wie folgt „eingebürgert“

$$
u_{\pm 1} \equiv u_{\pm\frac{1}{2}} \equiv u_\pm .
$$

Projektoren

Der Operator

$$
\mathcal{P}_\pm = \frac{1}{2}(\mathbf{1}\pm\gamma_5\not{S})
$$

projezieren auf die Unterräume für u und v der Helizität $\pm\frac{1}{2}$

$$
\boxed{\begin{array}{ll} \mathcal{P}_\pm u_\pm = u_\pm & \mathcal{P}_\pm v_\pm = v_\pm \\ \mathcal{P}_\pm u_\mp = 0 & \mathcal{P}_\pm v_\mp = 0 \end{array}}
$$

Für $\left|\vec{p}\right| \gg m$ (also im sog. „Hochenergie-Limes“) ist

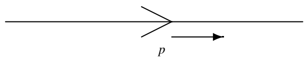
$$
\longrightarrow \not{S} \approx \not{P}/m
$$

$$
\boxed{\mathcal{P}_\pm = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{2}(\mathbf{1}\pm\gamma_5) & \text{für die } u\text{-Spinoren} \\ \frac{1}{2}(\mathbf{1}\mp\gamma_5) & \text{für die } v\text{-Spinoren} \end{array}\right.}
$$

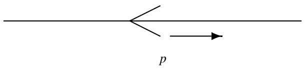
1-Teilchen-Wellenfunktion

ist gegeben als Amplitude zwischen Vakuum und 1-Teilchenzustand

$$\langle 0|\psi(x)|e^-, p\sigma\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} u_\sigma(p) e^{-ipx}$$



$$\langle e^+, p\sigma|\psi(x)|0\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} v_\sigma(p) e^{+ipx}$$



Bei den Bildchen handelt es sich wieder umd die graphischen Symbole, die in den Feynman-Graphen auftreten, der Pfeil gibt die Richtung des Ladungsflusses an.

3.3 Vektorfelder

Die Lagrange-Dichte ist gegeben durch (2.7)

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2} A_\mu A^\mu .$$

Die zugehörige Bewegungsgleichung ist die Proca-Gleichung (2.8)

$$\begin{aligned} &\left(-g^{\mu\nu}(\Box + m^2) + \partial^\mu \partial^\nu\right) A_\nu = 0 \\ &\quad \text{mit } \partial_\nu A^\nu = 0 \text{ für } m \neq 0. \end{aligned}$$

Für $\underline{\mathbf{m} \neq \mathbf{0}}$ hat A^μ wegen der Bedingung $\partial_\mu A^\mu = 0$ nur 3 (statt 4) unabhängige Komponenten und beschreibt ein Quantenfeld, welches ein Teilchen mit Spin 1 repräsentiert. Die 1-Teilchenzustände erhält man wie gehabt aus dem Vakuum durch Anwendung der Erzeuger

$$\begin{aligned} &|p, \lambda\rangle = a_\lambda^+(p)|0\rangle \\ &a_\lambda(p)|p'\lambda'\rangle = \delta_{\lambda\lambda'} \delta^3(\vec{p} - \vec{p}\,') \cdot 2p^0 . \end{aligned}$$

Dabei erfüllen die a, a^+ die kanonischen Vertauschungsregeln

$$\left[a_\lambda(p), a_{\lambda'}^+(p')\right] = 2p^0 \delta_{\lambda\lambda'} \delta^3(\vec{p} - \vec{p}\,'),$$

die übrigen Kommutatoren sind Null.

Die Lösung der Proca-Gleichung lautet via Fourier-Entwicklung

$$\begin{aligned} A^\mu(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3 p}{2p^0} \sum_\lambda \left(a_\lambda(p) \varepsilon^\mu(\lambda) e^{-ipx} + a_\lambda^+(p) \varepsilon^\mu(\lambda)^* e^{ipx}\right) \\ &\quad \text{mit } \varepsilon(\lambda) \cdot p = 0, \quad \varepsilon(\lambda)^2 = -1. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Die linearen Polarisationzustände ergeben sich zu

$$\begin{aligned} &\varepsilon^\mu(j) = (0, \vec{\varepsilon}_j); \ \vec{\varepsilon} \cdot \vec{p} = 0; \quad (\vec{\varepsilon}_j)^2 = 1 \qquad j = 1, 2 \\ &\vec{\varepsilon}_1 \times \vec{\varepsilon}_2 = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}, \qquad \vec{\varepsilon}(1) \cdot \vec{\varepsilon}(2) = 0. \end{aligned}$$

Die zirkularen Polarisationszustände lauten per definitionem

$$\varepsilon_\pm^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\varepsilon^\mu(1) \pm i \varepsilon^\mu(2)\right)$$

Die zirkularen Polarisationszustände entsprechen der Helizität ± 1 (Übung). Fehlt noch der longitudinale Polarisationszustand

$$\varepsilon^\mu(3) = \frac{1}{m} \left(|\vec{p}|, p^0 \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \right),$$

der der Helizität 0 entspricht.

Mit Hilfe der Polarisationszustände kann man nun die sog. *Polarisationssumme* berechnen (Übung)

$$\boxed{\sum_{\substack{\lambda=1,2,3\\(\lambda=\pm1,0)}} \varepsilon^\mu(\lambda)\varepsilon^\nu(\lambda)^* = -g^{\mu\nu} + \frac{p^\mu p^\nu}{m^2}}.$$

Energie-Impuls-Tensor

$$T^{\mu\nu} = \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\rho)}\right)\partial^\nu A_\rho - g^{\mu\nu}\mathcal{L}.$$

Unter Benutzung von $\Pi^\rho = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^0 A_\rho)}$ erhält man die Hamilton-Funktion und den räumlichen Anteil des Impuls-Operator wie gehabt

$$\begin{aligned} H &= \int \mathrm{d}^3x\, T^{00} = \int \mathrm{d}^3x\big(\Pi^\rho\partial^0 A_\rho - \mathcal{L}\big)\\ P^k &= \int \mathrm{d}^3x\, T^{0k} = \int \mathrm{d}^3x\big(\Pi^\rho\partial^k A_\rho\big) \end{aligned}$$

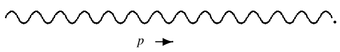
und somit den Impuls-Operator $P^\mu = (H, \vec{p})$ nach Einsetzen von A^μ aus (3.17)

$$\longrightarrow \boxed{P^\mu = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{2p^0}\sum_\lambda a_\lambda^+(p)a_\lambda(p)p^\mu}.$$

1-Teilchen-Wellenfunktion

erhält man auch wie bisher aus der Teilchen-Vakuum-Amplitude

$$\big|0\big\rangle A^\mu(x)p\lambda = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\cdot\varepsilon^\mu(\lambda)\cdot e^{-ipx}$$



Für den Fall $\underline{\mathbf{m = 0}}$ ist die Lorentz-Eichung weiterhin optional, d.h. A^μ hat 4 „freie" Komponenten. Man erhält als Lösung nur zwei Polarisationszustände

$$\varepsilon^\mu(\lambda)e^{-ipx}, \qquad \lambda = \pm1 \text{ (bzw. } \lambda = 1,2).$$

Dies sind die „physikalischen" Polarisationsrichtungen, während die übriggebliebene longitudinale ($\varepsilon^\mu \sim p^\mu$) eine „lichtartige" Polarisation wäre, was unphysikalisch ist.

1-Teilchenzustände

$$\big|p\lambda\big\rangle = a^+(p)\big|0\big\rangle, \quad \text{mit } \lambda = \pm1.$$

Aus (3.17) folgt die *Strahlungseichung*.

$$(3.17) \iff \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = A^0 = 0.$$

Man erhält (wie im Falle $m \neq 0$) via Berechnung über den Energie-Impuls-Tensor und unter Beachtung von $\vec{B} := \vec{\nabla}\times\vec{A}$ und $E^k = -\partial^0 A^k = \Pi^k$

$$\boxed{\begin{aligned} H &= \textstyle\int \mathrm{d}^3x\,\frac{1}{2}\big(\vec{E}^2 + \vec{B}^2\big)\\ P &= \textstyle\int \mathrm{d}^3x\big(\vec{E}\times\vec{B}\big) \end{aligned}}.$$

Polarisationssumme

$$\sum_{\substack{\lambda=\pm 1\\(\lambda=1,2)}} \varepsilon^\mu(\lambda)\varepsilon^\nu(\lambda)^* = -g^{\mu\nu} + \frac{k^\mu r^\nu + k^n u r^\mu}{r\cdot k}$$

(mit $(r^\mu) = (k^0, -\vec{k})$) ist *nicht* kovariant, d.h., das Quantisierungsverfahren ist nur in gut gewählten Inertialsystemen möglich, was aber letztlich ohne große physikalische Sequenzen bleibt, da man mit Lorentz- und Eichtransformationen die Kovarianz erzeugen kann. Das kann man aber umgehen, indem man die sog. Kovariante Quantisierung wählt

Kovariante Quantisierung

Man addiert zu der Lagrange-Dichte einen Eichfixierungs-Term, der die Eichinvarianz, die letztlich für obige Probleme verantwortlich ist, zerstört

$$\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L} - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2, \qquad \xi \in \mathbb{R}$$

Die Bewegungsgleichungen lauten nun

$$\big(-g^{\mu\nu}\Box + \partial^\mu\partial^\nu(1-1/\xi)\big)A_\nu = 0.$$

Diese Gleichung hat außer den physikalischen Lösungen noch zwei unphysikalische Lösungen. Setzt man z.B. $\xi := 1$, so lauten die Feldgleichungen einfach $\Box A^\nu = 0$ und man erhält als Lösungen

$$\varepsilon^\mu(1) = (0,1,0,0), \quad \varepsilon^\mu(2) = (0,0,1,0), \quad \varepsilon^\mu(3) = (0,0,0,1), \quad \varepsilon^\mu(4) = (1,0,0,0),$$

wovon $\varepsilon(3)$ und $\varepsilon(4)$ die unphysikalischen Lösungen sind, weil zeitartig (4) bzw. longitudinal (was für den betrachteten Fall $m = 0$ ebenfalls nicht möglich ist).

Quantisiert man nun kanonisch, entstehen für $\lambda = 3,4$ unphysikalische Zustände mit Norm < 0.

Kapitel 4

2-Punkt-Funktionen (Propagatoren)

Ein Propagator ist eine Greensche Funktion der zum System gehörigen Feldgleichungen zu kausalen Randbedingungen.

Sei D ein linearer Differential-Operator, dann ist die zugehörige Greensche Funktion $G(x-y)$ wie folgt definiert

$$\boxed{DG(x-y) = -\delta^4(x-y)},$$

d.h., die Greensche Funktion ist eine Art „Inverses" des Operators. Die Greensche Funktion ist nicht eindeutig, da man jederzeit noch eine Lösung der homogenen DGl. zu G hinzuaddieren kann und obige Gleichung noch immer erfüllt ist.

In der Quantenfeldtheorie werden die Randbedingungen grundsätzlich so gewählt, daß die Ausbreitung kausal erfolgt (d.h. immer vom früheren zum späteren Zeitpunkt).

4.1 Skalarfeld

Betrachtet wird ein skalares Feld $\phi \neq \phi^*$, welches i.a. nicht neutral sein muß. Die Greensche Funktion ist definiert durch

$$\left(\Box_x + m^2\right)G(x-y) = -\delta^4(x-y),$$

was man durch den Ansatz

$$G(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}^4 q e^{-iq(x-y)}\tilde{G}(q)$$
$$\delta^4(x-y) = \frac{1}{2\pi}\int \mathrm{d}^4 q e^{-iq(x-y)}$$

in eine algebraische Gleichung für $\tilde{G}(q)$ umwandeln kann

$$\longrightarrow (-q^2+m^2)\tilde{G}(q) = -1 \longrightarrow G(q) = \frac{1}{q^2-m^2}.$$

Nun erhält man durch „einfaches" Integrieren die gesuchte Greensche Funktion

$$‘G(x-y)’ = \int \mathrm{d}^4 q e^{-iq(x-y)}\frac{1}{q^2-m^2},$$

welche natürlich so nicht definiert ist wegen der Polstelle bei $q^2 = m^2$.

Die Vorschrift zur Behandlung der Pole entspricht der Vorgabe der Randbedingungen.

$$\int \mathrm{d}^4 q e^{-iq(x-y)}\frac{1}{q^2-m^2} = \int \mathrm{d}^3 q e^{i\vec{q}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}q^0 \frac{e^{-iq^0(x^0-y^0)}}{q^2-m^2}$$

Um den Residuensatz anwenden zu können, müssen die Polstellen ins Komplexe geschoben werden, dazu hat man drei Möglichkeiten.

a) Ersetze $q^0 \to \lim_{\varepsilon\to 0} q^0 + i\varepsilon$, wodurch beide Pole ins negativ Komplexe geschoben werden.

$$\longrightarrow \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iq^0(x^0-y^0)}}{(q^0+i\varepsilon)^2 - \vec{q}^2 - m^2}.$$

Die Pole liegen bei $q^0 = \sqrt{\vec{q}^2+m^2} - i\varepsilon$. Für $x^0 > y^0$ führt das via Resiuduensatz auf die sog. *retardierte Greensche Funktion* G_+, welche für $x^0 < y^0$ identisch Null ist (da dabei kein Pol innerhalb des Integrationsbereich liegt).

b) Analog verfährt man für $q^0 \to q^0 - i\varepsilon$, was auf die sog. *avancierte Greensche Funktion* G_-, welche für $x^0 > y^0$ identisch Null ist.

c) Der phys. interessanteste Fall ist $q^2 - m^2 \to q^2 - m^2 + i\varepsilon$, wodurch ein Pol oberhalb und ein Pol unterhalb der reellen Achse gelegt wird (bei $q^0 = \pm\sqrt{\vec{q}^2+m^2} \mp i\varepsilon$. Man erhält die sog. *kausale Green-Funktion* $D(x-y)$.

Zusammenhang mit der QFT, Propagatoren

Seien $A(x)$ und $B(x)$ Operatoren, dann ist das *Zeitgeordnetes Produkt* der Operatoren definiert als

$$\boxed{TA(x)B(y) := A(x)B(y)\cdot\Theta(x^0-y^0) + B(y)A(x)\cdot\Theta(y^0-x^0)}.$$

Das zeitgeordnete Produkt sorgt dafür, daß bei mehreren Operatoren immer der „älteste“ am weitesten rechts steht, also zuerst auf irgendwelche Zustände wirkt.

Sei $\phi \neq \phi^+$ ein Skalarfeld, dann ist die sog. *2-Punkt-Funktion* (für Skalarfelder) folgendermaßen definiert

$$\tau_2(x,y) := \langle 0 | T\phi(x)\phi^+(y) | 0 \rangle. \tag{4.1}$$

Es gilt folgende wichtige Identität, welche die Zweipunktfunktion in Beziehung setzt mit der kausalen Green-Funktion

$$\boxed{\tau_2(x,y) = iD(x-y)}, \tag{4.2}$$

$$\text{mit } D(x-y) = \int \frac{1}{(2\pi)^4} \int \mathrm{d}^4 q \frac{e^{-iq(x-y)}}{q^2 - m^2 + i\varepsilon}. \tag{4.3}$$

Diese Gleichung gilt in ähnlicher Form für beliebige Felder. Zum Beweis setzt man die Fourier-Darstellung für die ϕs ein und vergleicht dies mit dem Lösungsintegral der kausalen Greenschen Funktion $D(x-y)$.

Zusammenfassung: Aus der inhomogenen Differentialgleichung wurde durch Fourier-Transformation eine algebraische Gleichung für $D(q)$ erstellt, welche mit kausalen Randbedingungen $m^2 \to m^2 - i\varepsilon$ in eine Gleichung übergeht, deren Lösung $D(x-y)$ bis auf einen Faktor i der Zweipunktfunktion $\tau_2(x,y)$ entspricht. Dieses $D(x-y)$ bezeichnet man auch als *Feynman-Propagator* (nach Stückelberg, Feynman).

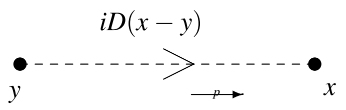
Die Zweipunktfunktion sorgt dank ihrer Konstruktion dafür, daß sich Teilchen stets von „früher“ nach „später“ bewegen (kausales Verhalten)

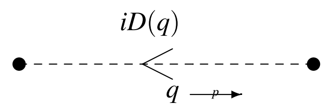
$$\begin{aligned}\tau_2(x,y) &:= \langle 0 | T\phi(x)\phi^+(y) | 0 \rangle \\ &= \Theta(x^0-y^0)\langle 0 | \phi(x)\phi(y) | 0 \rangle && \text{(Teilchen } y \to x) \\ &+ \Theta(y^0-x^0)\langle 0 | \phi^+(y)\phi(x) | 0 \rangle && \text{(Antiteilchen } x \to y).\end{aligned}$$

Um der „Kausalität“ auf die Schliche zu kommen, betrachtet man z.B. die vorletzte Gleichung. Setzt man dort nämlich die Felder in ihrer Fourier-Darstellung ein, erhält man (ausgedrückt durch Erzeuger und Vernichter) ein Teilchen, welches am Ort y erzeugt und am Ort x vernichtet wird, sofern die Zeit von y^0 nach x^0 fortschreitet. Bei der unteren Gleichung trifft entsprechendes auf das zugehörige Antiteilchen zu.

Aufgrund dieses kausalen Verhaltens ist es nun einsichtig, daß man gemäß (4.2) die „kausale“ Green-Funktion berechnen muß (bzw. kann), um die Zweipunktfunktion zu erhalten.

Das graphische Symbol für das Skalarfeld lautet





(das linke im Orts-, das rechte im Impulsraum, der Pfeil markiert links Richtung des Ladungsflusses, rechts die Richtung des Impulsflusses.)

4.2 Vektorfelder

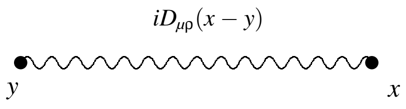
Die Zweipunktfunktion ergibt sich definitionsgemäß aus

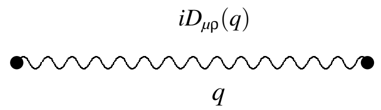
$$
\begin{aligned}
\tau_2(x,y) &= \langle 0 | T A_\mu(x) A_\nu^+(y) | 0 \rangle \equiv iD_{\mu\nu}(x-y) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{2p^0} \underbrace{\left(\sum_\lambda \varepsilon_\mu(\lambda) \varepsilon_\nu(\lambda)^* \right)}_{=-g_{\mu\nu}+\frac{p_\mu p_\nu}{m^2} \text{ f. } m\neq 0} \left(\Theta(z^0) e^{-ipz} + \Theta(-z^0) e^{ipz} \right) \\
&= \frac{i}{(2\pi)^4} \int \mathrm{d}^3 q e^{-iq(x-y)} \left(\frac{-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{m^2}}{q^2 - m^2 + i\varepsilon} \right) .
\end{aligned}
$$

Das $D_{\mu\nu}$ ist ein Tensor 2. Stufe. Der Beweis, daß $\tau_2 \equiv iD_{\mu\nu}$ ist, läuft entweder analog dem bei den Skalarfeldern, oder man fouriertransformiert die Definitionsgleichung für die Greensche Funktion

$$
\begin{aligned}
& \left[-g^{\mu\rho} \left(\Box + m^2 \right) + \partial^\mu \partial^\rho \right] D_{\rho\nu}(x-y) = -g^\mu{}_\nu \delta^4(x-y) \\
& \longrightarrow \left[-g^{\mu\rho} \left(q^2 - m^2 \right) + q^\mu q^\rho \right] D_{\rho\nu}(q) = -g^\mu{}_\nu \\
& \text{Ansatz:} \quad D_{\rho\nu}(q) = g_{\rho\nu} \cdot A + q_\rho q_\nu \cdot B \\
\longrightarrow & \boxed{D_{\rho\nu} = \frac{-g_{\nu\rho} + \frac{q_\nu q_\rho}{m^2}}{q^2 - m^2 + i\varepsilon}},
\end{aligned}
$$

womit durch Fourier-Transformation die Gleichheit von $\tau_2(x,y)$ und $D_{\mu\nu}(x-y)$ gezeigt wäre. Das graphische Symbol lautet





<u>Im Fall $\mathbf{m = 0}$</u> läuft die Polarisationssumme nur über die beiden transversalen Polarisationen

$$
\sum_{\lambda=1,2} \varepsilon_\mu(\lambda) \varepsilon_\nu(\lambda)^* = -g_{\mu\nu} + \frac{r_\mu q_\nu + r_\nu q_\mu}{r \cdot q}, \quad (r^\mu) = (q^0, -\vec{q}).
$$

Zwei Probleme treten auf:

1. Diese Polarisationssumme ist nicht kovariant, d.h., sie gilt nur in fest gewählten Systemen und

2. Der Operator in der Feldgleichung entspricht nicht dem Propagator, da er nicht exisitiert, denn

$$\underbrace{\left(g^{\mu\nu}q^2 - q^\mu q^\rho\right)}_{\text{nicht invertierbar}} \cdot q_\rho = 0.$$

Daß obiger Operator nicht invertierbar ist, liegt daran, daß laut obiger Gleichung q_ρ Eigenvektor zum Eigenwert 0 ist, was bedeutet, daß die Determinante des Operators verschwindet und er damit nicht invertierbar ist.

Kovariantes Verfahren

Man geht wieder so vor wie im klassischen Fall und bricht die Eichinvarianz durch Einführung eines Eichfixierungs-Terms

$$\mathcal{L} \to \mathcal{L} \underbrace{- \frac{1}{2\xi}\left(\partial_\mu A^\mu\right)^2}_{\text{Eichfixierung}}, \qquad \xi \in \mathbb{R} \text{ bel.}$$

Hieraus folgt ein invertierbarer Operator in den Feldgleichungen

$$\underbrace{\left(g^{\mu\rho}q^2 - (1-\xi)\cdot q^\mu q^\nu\right)}_{\text{invertierbar}} D_{\rho\nu}(q) = -g^\mu{}_\nu.$$

Die obige Gleichung liefert unphysikalische Zustände, die von ξ abhängen. In der „Praxis“ treten aber keine beobachtbaren Konsequenzen auf, da z.B. in der Quantenelektrodynamik (QED) wegen der Stromerhaltung gerade diese Terme wieder herausfallen.

In der Praxis setzt man $\xi = 1$ und bezeichnet dies als *Feynman-Eichung*. Feynman-geeicht nimmt der Propagator folgende einfache Form an (Übung)

$$\xi = 1 \longrightarrow D_{\mu\rho} = \frac{-g_{\mu\rho}}{q^2 + i\varepsilon}.$$

4.3 Dirac-Feld

Wenn $a(x)$ und $b(y)$ antikommutierende Operatoren sind, ist das zeitgeordnete Produkt mit einem Minuszeichen definiert

$$Ta(x)b(y) := \Theta(x^0 - y^0)a(x)b(y) - \Theta(y^0 - x^0)b(y)a(x)$$

Die zur Dirac-Theorie gehörige τ_2-Funktion ergibt sich „definitionsgemäß“ aus

$$\boxed{\tau_2(x,y) = iS(x-y)}$$

$$\text{mit } S(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}^4q\, \frac{\not{q} + m}{q^2 - m^2 + i\varepsilon} \cdot e^{-iq(x-y)}.$$

$S(x-y)$, der *Dirac-Propagator* ist das Inverse des Dirac-Operators. Er hat das graphische Symbol

Der Pfeil markiert wieder die Richtung des Ladungsflusses.

Kapitel 5

Wechselwirkende Felder

5.1 Beispiele von Wechselwirkungen

- Skalare Selbst-WW

  Gegeben sei ein neutrales Skalarfeld $\phi = \phi^*$ und die „freie“ Lagrange-Dichte (also die, die freie Felder erzeugt und demnach bilinear in den Feldern ist)

  $$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - \frac{m^2}{2}\phi^2$$

  Die komplette Lagrange-Dichte setzt sich nun zusammen aus obiger freier und einer, die die Wechselwirkung („Interaction“) beschreibt, z.B.

  $$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{int}} \qquad \text{mit } \mathcal{L}_{\text{int}} = \begin{cases} g\phi^4 \\ g_4\phi^4 + g_3\phi^3 \end{cases} ,$$

  wobei g, g_3, g_4 Kopplungskonstanten sind. Zur Erklärung: In den ww. Lagrange-Dichten müssen die Felder in „höheren Potenzen“ als zwei auftreten, denn aus den bilieniearen Ausdrücken folgen lediglich die freien Felder. Weiterhin ist es nicht möglich $\mathcal{L} \sim \phi^3$ zu wählen, weil daraus eine nach unten unbeschränkte Hamilton-Funktion folgen würde, welche physikalisch nicht brauchbar wäre, so daß obige Ausdrücke die „einfachstmöglichen“ Beispiele für wechselwirkende Skalarfelder sind.

- Yukawa-WW

  Gegeben sei ein neutrales Skalarfeld $\phi = \phi^*$ und ein Dirac-Feld ψ. Die „neue“ Lagrange-Dichte ergibt sich dann als

  $$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0^\phi + \mathcal{L}_0^\psi + \mathcal{L}_{\text{int}} \qquad \text{mit } \mathcal{L}_{\text{int}} = \begin{cases} g\overline{\psi}\psi\phi = g\overline{\psi}\mathbf{1}\psi\phi \\ g\overline{\psi}i\gamma_5\psi\phi \end{cases} .$$

  Yukawa führte diese Lagrange-Dichte zur Beschreibung von Kernkräften ein.

- Elektromagnetische WW

  Die klassischen Bewegungsgleichungen (Maxwell-Gleichungen)

  $$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$$

  ergeben sich aus der Lagrange-Dichte

  $$\mathcal{L} = \underbrace{-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}}_{=\mathcal{L}_0} \underbrace{-j_\nu A^\nu}_{=\mathcal{L}_{\text{int}}} .$$

Führt man nun die sog. ***minimale Substitution*** durch, indem man die *kovariante Ableitung* einführt

$$\begin{aligned} i\partial_\mu &\longrightarrow i\partial_\mu - eA_\mu \\ \partial_\mu &\longrightarrow \partial_\mu + ieA_\mu \equiv \mathrm{D}_\mu, \end{aligned}$$

was dem klassischen $\vec{p} \to \vec{p} - e\vec{A}$ entspricht, erhält man aus der freien Lagrange-Dichte eine neue, die nun auch eine Wechsekwirkung beschreibt. Das Konzept der minimalen Substitution ist ein generelles Prinzip in der QFT.

$$\mathcal{L}_0 \longrightarrow \mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \overline{\psi}i\gamma^\mu \mathrm{D}_\mu\psi - m\overline{\psi}\psi = \mathcal{L}_0 \underbrace{-e\overline{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu}_{\mathcal{L}_{\text{int}}=-j^\mu A_\mu}, \tag{5.1}$$

mit $j^\mu = e\overline{\psi}\gamma^\mu\psi$. $e = \sqrt{4\pi\alpha}$ ($\alpha \approx \frac{1}{137}$: Feinstrukturkonstante) ist die elektromagnetische Kopplungskonstante. Beim Feldstärke-Tensor $F_{\mu\nu}$ hat das Einführen der kovarianten Ableitung wegen seiner Antisymmetrie keinerlei Auswirkung.

Konventionsgemäß schreibt man wohl die Kopplungskonstante e nicht in den Strom, sondern vor den Stromterm in $\mathcal{L}$, d.h.: $j^\mu = \overline{\psi}\gamma^\mu\psi$ und $\mathcal{L}_{\text{int}} = -e\,j^\mu A_\mu$.

- Wechselwirkung mit Ableitungskopplungen

$$\mathcal{L}_{\text{int}} \text{ enthält } \partial_\mu : \quad \text{z.B.: } \mathcal{L}_{\text{int}} \sim \big(\phi^+\partial_\mu\phi - (\partial_\mu\phi^+)\phi\big)A_\mu.$$

> Allgemein kann man sagen, daß der WW-Term $\mathcal{L}_{\text{int}}$ sich aus Produkte von Feldoperatoren am gleichen Ort x (!), Koeffizienten (Zahlen) oder Ableitung ∂_μ zusammensetzt.

Die sich ergebenden Feldgleichungen sind dann i.a. nicht mehr linear, d.h., man muß versuchen, diese approximativ zu lösen oder man benötigt andere Methoden. . .

Grundproblem der QFT

Aus den Feldern, die man gemäß einer best. Theorie berechnet hat, gilt es zum einen Übergangsamplituden (S-Matrix-Elemente) zu bestimmen, um aus denen wiederum physikalische Observablen (z.B. Wirkungsquerschnitte) zu erhalten.

Die Berechnung der $S-Matrix-Elemente$ wird üblicherweise durch Störungsrechnung (oder Gitter-Approximation) getätigt und in Kap. 6 behandelt.

Das Ziel des nächsten Abschnittes ist es, zu zeigen, was zu tun ist, wenn man die Übergangsamplituden bereits bestimmt hat

5.2 S-Matrix-Element, Wirkungsquerschnitt

5.2.1 S- und T-Matrix

Streuproblem werden üblicherweise so behandelt, daß man von freien Teilchen zu Zeiten $\pm\infty$ ausgeht, welche nur in einen kurzen Zeitintervall miteinander wechselwirken. Bei einem allgemeinen Streuprozeß gehen die Teilchen $a_1(p_1), \ldots, a_m(p_m)$ über in $b_1(p'_1), \ldots, b_n(p'_n)$.
Der Anfangszustand (*initial state*) zur Zeit $t = -\infty$ ist gegeben als

$$|i\rangle = |a_1(p_1), \ldots, a_m(p_m)\rangle,$$

(wobei die anderen Quantenzahlen hier unterschlagen wurden.) Der Endzustand (*final state*) wird entsprechend bezeichnet

$$|f\rangle = |b_1(p'_1), \ldots, b_n(p'_n)\rangle.$$

Die Wechselwirkung läßt sich mittels eines unitären Operators U beschreiben

$$\text{WW:} \quad |i\rangle \longrightarrow U(t,-\infty)|i\rangle, \quad UU^+ = U^+U = \mathbf{1}.$$

Asymptotisch wird dies zu

$$\big(\lim_{t\to+\infty} U(t,-\infty)\big)|i\rangle = S|i\rangle, \qquad SS^+ = S^+S = \mathbf{1}.$$

S ist der S-Operator. Das Übergangs-Matrix-Element

$$\langle f|S|i\rangle \equiv S_{fi}$$

bezeichnet man als S-Matrix-Element. Um die 4-Impulserhaltung zu gewährleisten, muß das S-Matrix-Element folgenden Form annehmen

$$\text{Impulserhaltung} \longrightarrow S_{fi} = \delta_{fi} + i(2\pi)^4\delta^4(P_i - P_f)T_{fi}, \tag{5.2}$$

wobei die $P_{i,f}$ jeweils die Summe der Einzelimpulse darstellen. Man bezeichnet

$$T_{fi} \equiv \langle f|T|i\rangle$$

als T-Matrix-Element. Die beiden Matrix-Elemente S_{fi} und T_{fi} sind lorentzinvariant.

Wirkungsquerschnitt

Bei einem Streuprozeß $a_1(p_1)+a_2(p_2) \longrightarrow b_1(p'_1)+\cdots+b_n(p'_n)$ (a_2 ist dabei das Target im Ruhesystem, während a_1 einlaufende Teilchen beschreibt) ist der Wirkungsquerschnitt gegeben als

$$\text{WQ} = \frac{\text{Übergangsrate}}{\text{Flußdichte der einlaufenden Teilchen} \cdot \text{Zahl der Target-Teilchen}} \tag{5.3}$$

Im folgenden wird wohl ein bißchen geschummelt, weil man eigentlich Wellenpakete betrachten müßte, was aber mathematisch zu mühsam wä re.

Die Übergangswahrscheinlichkeit für einen Übergang vom Anfangszustand $|i\rangle$ zu einem anderen Zustand $|f\rangle$ (d.h. $f \neq i$ ist gegeben als

$$dw_{fi} = \left|(2\pi)^4\delta^4(P_i - P_f)T_{fi}\right|^2 \underbrace{\frac{\mathrm{d}^3p'_1}{2p'^0_1}\cdots\frac{\mathrm{d}^3p'_n}{2p'^0_n}}_{=:\mathrm{d}\Phi}$$

Das Betragsquadrat gibt die Wahrscheinlichkeit für einen Übergang in einen Zustand mit festem Impuls. Integriert man über alle auslaufenden Impulse, erhält man die Gesamt-Übergangswahrscheinlichkeit.

Mit dem Quadrat der δ^4-Funktion hat man natürlich ein Problem. Die „Lösung" dieses Problems hat die Form[1]

$$\left|(2\pi)^4\delta^4(P_i - P_f)T_{fi}\right|^2 = V \cdot T(2\pi)^4|T_{fi}|^2\delta^4(P_f - P_i),$$

so daß man folgende Übergangsrate erhält

$$\frac{\mathrm{d}w_{fi}}{T} = V(2\pi)^4\delta^4(P_i - P_f)\mathrm{d}\Phi\left|T_{fi}\right|^2.$$

[1] Man kennt aus den Quantenmechanik-Vorlesungen

$$\left|\int_{-T/2}^{T/2}\mathrm{d}t\, e^{i(\omega-\omega')t}\right| = |T\cdot 2\pi\delta(\omega-\omega')|^2$$

und damit analog

$$\left|\int_V \mathrm{d}^3x\, e^{i(\vec{p}-\vec{p}\,')\vec{x}}\right|^2 \approx V(2\pi)^3\delta^3(\vec{p}-\vec{p}\,').$$

Die Normierung für ein unendliches Volumen ist

$$\text{Norm.} \quad \langle p | p' \rangle = 2p^0 \delta^3(\vec{p} - \vec{p}\,').$$

Für endliche Volumina geht die δ-Funktion in ein Kronecker-δ über

$$\text{f. endl. Volumen} \quad (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{p}\,') \longrightarrow V \delta_{\vec{p}\vec{p}\,'}$$

Und somit erhält man aus

$$\langle p | p \rangle = \frac{2p^0}{(2\pi)^3} \quad \text{Anzahl der Teilchen in } V.$$

Die Flußdichte ist demnach $\frac{2p^0}{(2\pi)^3} |\vec{v}|$ mit $\vec{v} = \vec{p}/p^0$. Daraus kann man den differentiellen Wirkungsquerschnitt berechnen

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{\mathrm{d}w_{fi}}{T} \cdot \underbrace{\frac{(2\pi)^3}{V 2p_2^0}}_{\text{Target-Teilchen}} \cdot \underbrace{\frac{(2\pi)^3}{|\vec{v}| 2p_1^0}}_{\text{einlaufendes Teilchen}}$$

Mit $p_2^0 = m_2$, $|\vec{p}_1| m_2 = \sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}$ ergibt sich

$$\longrightarrow \mathrm{d}\sigma = \frac{(2\pi)^{10}}{4\sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} |T_{fi}|^2 \delta^4(P_f - P_i) \mathrm{d}\Phi. \tag{5.4}$$

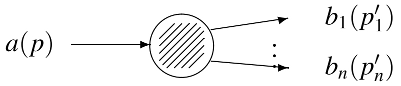
Anmerkungen:

- Die Dimension des WQ ist die einer Fläche (in natürlichen Einheiten Energie^{-2}). Die Umrechnung ist $1GeV^{-2} = 389385,7nb$.
- Laut Konvention ist

  $$iT_{fi} = \left(\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \right)^{2+n} \mathcal{M}_{fi} \qquad n: \text{ Anzahl der Teilchen.}$$

  Das $\mathcal{M}_{fi}$ folgt aus den Feynmanregeln (Kap. 6).

5.2.2 Streuung am äußeren Potential



Das äußere Potential wird in der QFT durch ein „klassisches“ äußeres Potential beschrieben.

Typische Prozesse sind z.B. elastische Streuung, Bremsstrahlung ($a(p) \rightarrow a(p_1') + \gamma(p_2')$) oder Paarerzeugung ($\gamma \rightarrow e^+ + e^-$).

Der differentielle WQ berechnet sich nach (vgl. (5.4))

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\sigma &= \frac{(2\pi)^3}{2p^0 |\vec{v}|} |T_{fi}|^2 \underbrace{2\pi\delta(P_f^0 - P^0)}_{\text{Energieerhaltung}} \underbrace{\frac{\mathrm{d}^3 p_1'}{2{p_1'}^0} \cdots \frac{\mathrm{d}^3 p_n'}{2{p_n'}^0}}_{=:\mathrm{d}\Phi} \\ &= \frac{(2\pi)^4}{|\vec{p}|} |T_{fi}|^2 \delta(P_f^0 - P^0) \mathrm{d}\Phi \end{aligned}$$

(für Spin-0 oder feste Helizität). Man beachte dabei $p^0 |\vec{v}| = |\vec{p}|$. Über die „einlaufenden“ Spins wird gemittelt, über die auslaufenden wird summiert

$$|T_{fi}|^2 \longrightarrow \sum_{\sigma} \sum_{\sigma_1', \ldots, \sigma_n'} \frac{1}{2s+1} |T_{fi}(\sigma_n \sigma_1', \ldots, \sigma_n')|^2,$$

wobei s der Spin des einfallenden Teilchens a ist.

Elastische Streuung:

$p'^0 = p^0, |\vec{p}| = |\vec{p}'|$ Das $\mathrm{d}^3 p'$ kann man ersetzen durch Kugelkoordinaten

$$\mathrm{d}^3 p' = |\vec{p}'|^2 \mathrm{d}\Omega \mathrm{d}|\vec{p}'|$$

womit der WQ folgende Form annimmt

$$\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\text{el.}} = \frac{(2\pi)^4}{4}|T_{fi}|. \tag{5.5}$$

<u>Beispiel:</u> Streuung eines Elektrons am Potential $V(x)$.

Die ww. Lagrange-Dichte ist

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = e\overline{\psi}\gamma_\mu\psi A^\mu,$$

wobei $A^\mu = \left(V(\vec{x}), \vec{0}\right)$ das äußere Potential mit einem „klassischen" $V(\vec{x})$ ist. Damit wird

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = e\overline{\psi}\gamma_0 V(\vec{x})\psi.$$

Nimmt man als Potential z.B. ein Coulomb-Potential an $V(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi}\frac{Ze}{r}$, so bezeichnet man den Streuvorgang als *Mott-Streuung*. Den ww. Hamilton-Operator erhält man via

$$H_{\text{int}} = \int \mathrm{d}^3x\, \mathcal{H}_{\text{int}} = -\int \mathrm{d}^3x\, \mathcal{L}_{\text{int}},$$

wobei im vorliegenden Fall $\mathcal{H}_{\text{int}} = -\mathcal{L}_{\text{int}}$ ist. Nun geht man ins *Wechselwirkungsbild* über, d.h., die Operatoren ergeben sich aus dem Heisenberg-Bild und die Zustände haben eine Zeitentwicklung gemäß

$$|\psi(t)\rangle = U(t,t_0)|\psi(t_0)\rangle$$
$$\text{mit } i\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = H_{\text{int}}U, \qquad U(t_0,t_0) = \mathbf{1}.$$

Mit Hilfe dieses *Zeitentwicklungsoperators* kann man nun Zustände zu Zeiten „$t > -\infty$" wie folgt berechnen

$$t_0 = -\infty \longrightarrow |i\rangle = |e^-, p\sigma\rangle, \qquad t > t_0 \longrightarrow |i\rangle \to U(t,t_0)|i\rangle.$$

$U(t,t_0)$ ist Lösung der Integralgleichung

$$U(t,t_0) = \mathbf{1} - i\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t'\, H_{\text{int}}(t')U(t',t_0)$$

In der 1. Näherung (Bornsche Näherung) erhält man

$$U(t,t_0) = \mathbf{1} - i\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t'\, H_{\text{int}}(t'). \tag{5.6}$$

Daraus erhält man (bei bekanntem U) als S-Matrix-Element

$$S_{fi} = \lim_{t\to\infty}\langle f|U(t,-\infty)|i\rangle$$

Der Endzustand $|f\rangle = |e^-, p'\sigma'\rangle$ sie dabei ungleich dem Anfangszustand $|i\rangle$. Setzt man (5.6) ein, erhält man

$$\begin{aligned}
\longrightarrow S_{fi} &= -\langle f|i\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\, H_{\text{int}}(t)|i\rangle \\
&= ie\int \mathrm{d}^4x\, V(\vec{x})\langle f|\overline{\psi}(x)\gamma_0\psi(x)|i\rangle = \cdots \\
&= \frac{ie}{(2\pi)^3}\underbrace{\int \mathrm{d}^3x\, V(\vec{x})e^{i(\vec{p}-\vec{p}')\vec{x}}}_{=:\tilde{V}(\vec{p}-\vec{p}')\equiv\tilde{V}(\vec{q})}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t\, e^{-i(p^0-p'^0)t}\overline{u}_{\sigma'}(p')\gamma_0 u_\sigma(p)}_{=2\pi\delta(p^0-p'^0)\overline{u}_{\sigma'}(p')\gamma_0 u_\sigma(p)}
\end{aligned}$$

Die untere Zeile erhält man durch Einsetzen von ψ in der Fourier-Darstellung und „etwas“ Rechnung. Vergleicht man dies mit (5.2) (für $f \neq i$), ergibt sich

$$\longrightarrow T_{fi} = \frac{e}{(2\pi)^3}\tilde{V}(\vec{q})\overline{u}_{\sigma'}(p')\gamma_0 u_\sigma(p).$$

Setzt man dies in (5.5) ein, erhält man als WQ

$$\longrightarrow \left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\text{unpol.}} = \frac{e^2}{16\pi^2}\left|\tilde{V}(\vec{q})\right|^2 \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{\sigma,\sigma'}\left|\overline{u}_{\sigma'}(p')\gamma_0 u_\sigma(p)\right|^2}_{\text{Polarisations}-\text{Summe}}.$$

Um obige Polarisationssumme zu bestimmen, betrachtet man zunächst mal zwei Spinoren w_1, w_2, für die gilt (Übungen)

$$\begin{aligned}
&(\overline{w}_2\gamma_\mu w_1)^* = \overline{w}_1\gamma_\mu w_2\\
&\overline{w}_1\gamma_\mu w_2\overline{w}_2\gamma_\nu w_1 = \mathrm{Tr}\left\{(w_1\overline{w}_1)\gamma_\mu(w_2\overline{w}_2)\gamma_\nu\right\}
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Damit wird besagte Polarisationssumme zu

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\sum_{\sigma,\sigma'}\overline{u}_{\sigma'}(p')\gamma_0 u_\sigma(p)\overline{u}_\sigma(p)\gamma_0 u_{\sigma'}(p')\\
&\quad\overset{(5.7)}{=} \frac{1}{2}\sum_{\sigma,\sigma'}\mathrm{Tr}\left\{u_{\sigma'}(p')\overline{u}_{\sigma'}(p')\gamma_0 u_\sigma(p)\overline{u}_\sigma(p)\gamma_0\right\}\\
&\quad\overset{(2.15)}{=} \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left\{(\not{p}'+m)\gamma_0(\not{p}+m)\gamma_0\right\}\\
&\quad= \frac{1}{2}\left(\mathrm{Tr}\left\{\not{p}'\gamma_0\not{p}\gamma_0\right\} + m^2\mathrm{Tr}\left\{\gamma_0^2\right\}\right)
\end{aligned}$$

Das letzte Gleichheitszeichen gilt, da $\mathrm{Tr}\{\gamma_1\ldots\gamma_n\} = 0$ für ungerades n.
Um nun obige Spuren berechnen zu können, bedient man sich der Formel (Übungen)

$$\mathrm{Tr}\left\{\not{a}\gamma_\mu\not{b}\gamma_\nu\right\} = 4\left(a_\mu b_\nu + a_\nu b_\mu - (a\cdot b)g_{\mu\nu}\right)$$

und des Skalarprodukts $\vec{p}\cdot\vec{p}' = \left|\vec{p}\right|\left|\vec{p}'\right|\cos\vartheta$ mit $\vartheta = \sphericalangle(\vec{p},\vec{p}')$

$$\longrightarrow \frac{1}{2}\sum_{\sigma,\sigma'}\quad\overline{u}_{\sigma'}(p')\gamma_0 u_\sigma(p)\overline{u}_\sigma(p)\gamma_0 u_{\sigma'}(p') = 4\left(\vec{p}^2\cos^2\tfrac{\vartheta}{2} + m^2\right)$$

5.2.3 Optisches Theorem

Bei einem allgemeinen Streuprozeß ergibt sich das S-Matrix-Element aus (5.2)

$$S_{fi} = \delta_{fi} + i(2\pi)^4\delta^4(P_f - P_i)T_{fi}. \tag{5.8}$$

Aus der Unitarität von S folgt die Erhaltung der Wahrscheinlichkeit

$$\longrightarrow S^+ = S^{-1}, \qquad \sum_f\left|\langle f|S|i\rangle\right|^2 = 1\ \forall|i\rangle.$$

Betrachtet man

$$\begin{aligned}
S^+S = 1 \longrightarrow \langle i'|S^+S|i\rangle = \delta_{ii'} &\overset{(*)}{=} \sum_f\int\mathrm{d}\Phi(f)\langle i'|S^+|f\rangle\langle f|S|i\rangle\\
&= \sum_f\int\mathrm{d}\Phi(f)\langle f|S|i'\rangle\langle f|S|i\rangle = \sum_f\int\mathrm{d}\Phi(f)\,S_{fi'}S_{fi}.
\end{aligned} \tag{5.9}$$

Bei der Umformung $(*)$ wurde die Formel $\sum_f |f\rangle\langle f| = \sum_f \int \mathrm{d}\Phi(f) |f\rangle\langle f|$ benutzt. Für $|i\rangle = |i'\rangle$ ergibt sich aus (5.9) unter Benutzung von (5.8)

$$\begin{aligned}
\cdots &= \sum_f \int \mathrm{d}\Phi(f) \underbrace{-i\big(T_{ii} - T_{ii}^*\big)}_{=2\Im(T_{ii})} \\
&= \sum_f \underbrace{\int \mathrm{d}\Phi(f)\, \delta^4(P_f - P_i)(2\pi)^4 \big|T_{fi}\big|^2}_{\sim\sigma(i\to f)} \\
&= \sigma_{\text{tot}} := \sum_f \sigma(i \to f).
\end{aligned}$$

Dabei wurde eine δ-Funktion „gekürzt“. Mit Proportionalitätsfaktoren ergibt sich letztlich das Optische Theorem zu

$$\Im T_{ii} = 2\sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2} \cdot \sigma_{\text{tot}},$$

wobei T_{ii} das T-Matrix-Element für Vorwärtsstreuung ist.

5.2.4 Vertices

Ein allgemeiner Wechselwirkungsterm in $\mathcal{L}_{\text{int}}$ hat die Form

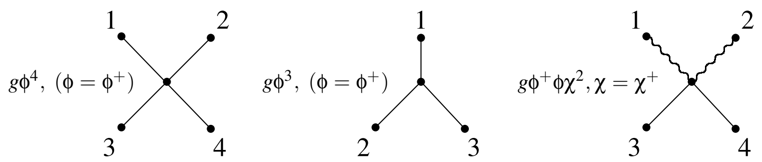
$$c_n \phi_1(x) \cdot \phi_n(x),$$

wobei die ϕ_k Feldoperatoren oder deren Komponenten sind. c_n ist ein Koeffizient (der aber auch z.B. Ableitung ∂_μ enthalten kann). Der Vertex-Faktor ist dann wie folgt definiert

$$\boxed{\text{Vertex} = i c_n S_n}.$$

S_n, der *Symmetriefaktor* ist dabei eine Zahl, die der Anzahl der Möglichkeiten entspricht, n (gleichartige) Punkte mit einem festen Punkt (dem Vertex) zu verbinden. Falls alle Felder ϕ_i paarweise verschieden sind, ist $S_n = 1$

Beispiele:

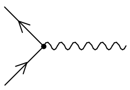


Bei der ϕ^4-WW kann man das Bildchen auf $S_n = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$ verschiedene Arten malen, bei der ϕ^3-WW ist entsprechend $S_n = 3!$, während bei der $\phi^+\phi\chi^2$-WW nur zwei Möglichkeiten bestehen, den Graphen zu malen, also $S_n = 2$ (jeweils immer bei durchnumerierten und festgehaltenen Punkten, d.h. lediglich Vertauschung der Linien sind möglich, um zum gleichen Bild zu gelangen).

In der QED ist

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = e\overline{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu = \sum_{\alpha,\beta} e\gamma^\mu_{\alpha\beta}\overline{\psi}_\alpha\psi_\beta A_\mu,$$

woraus sich folgender Vertexfaktor ergibt (als Matrix geschrieben)

QED-Vertices $= ie\gamma^\mu$. Symbol : 

5.3 Greensche Funktionen

In diesem Kapitel wird die Verallgemeinerung des freien Propagators, welcher die Greensche Funktion der freien Feldgleichung war, behandelt. Gegeben sei ein neutrales Skalarfeld $\phi = \phi^+$ anhand derer der Formalismus gezeigt wird (für andere Felder alles analog).

Die n-Punkt-Funktion ist analog der Zweipunkt-Funktion definiert (vgl. (4.1))

$$\tau_n(x_1, \ldots, x_n) := \langle 0 | T\phi(x_1) \ldots \phi(x_n) | 0 \rangle, \tag{5.10}$$

(allgemeiner: $\langle 0 | T\phi_1(x_1) \ldots \phi_n(x_n) | 0 \rangle$), woraus beim Übergang in den Impulsraum (durch Fourier-Transformation) folgendes wird

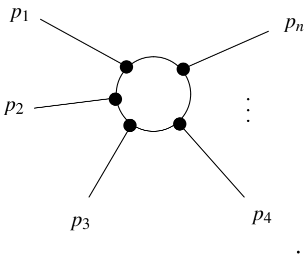
$$\begin{aligned} \text{Impulsraum} \int \mathrm{d}^4x_1 \ldots \mathrm{d}^4x_n \, e^{-i(p_1x_1+\cdots+p_nx_n)}\tau_n(x_1, \ldots, x_n) \\ = (2\pi)^4\delta^4(p_1 + \cdots + p_n)\tilde{\tau}_n(p_1, \ldots, p_n). \end{aligned} \tag{5.11}$$

Die δ^4-Funktion steht wegen der Translationsinvarianz

$$\text{Transl.inv.} \longrightarrow \tau_n(x_1 - x_n, \ldots, x_{n-1} - x_n, 0),$$

(regelt also die Gesamtimpulserhaltung). Es ist zu beachten, daß die Impulse nicht auf der Massenschale liegen.

Das graphische Symbol der n-Punkt-Funktion lautet



.

Der wechselwirkende Propagator ergibt sich aus wechselwirkenden Feldern zu

$$\tau_2(x_1, x_2) = \langle 0 | T\phi(x_1)\phi(x_2) | 0 \rangle.$$

Beim Übergang in den Impulsraum wird daraus

$$\int \mathrm{d}^4x_1 \int \mathrm{d}^4x_2 \, \tau_2(x_1, x_2) e^{-i(p_1x_1+p_2x_2)} = (2\pi)^4\delta^4(p_1 + p_2)\tilde{\tau}_2(p_1, p_2)$$

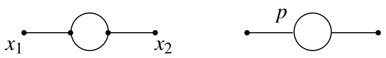
Man führt nun als Schreibweise ein

$$\tau(p_1 - p) =: i\Delta(p).$$

Für ein freies Skalarfeld ist z.B.

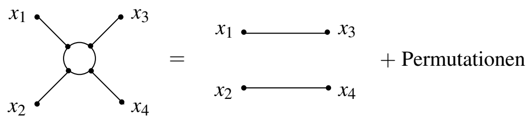
$$\text{freies Skalarfeld:} \quad \Delta(p) = \frac{1}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}.$$

Das graphische Symbol für den „vollständigen“ (d.h. wechselwirkenden) Propagator ist



Zusammenhängende: n-Punkt-Funktionen τ_n^c c:connected

enthalten keine Terme der Art $\tau_{n_1} \cdot \tau_{n_2}; \tau_{n_1} \cdot \tau_{n_2} \cdot \tau_{n_3}; \ldots$ ($n_i < n, \sum_i n_i = n$. Ein Beispiel für eine nichtzusammenhängende 4-Punkt-Funktion besteht z.B. aus freien Feldern



Amputierte n-Punkt-Funktionen

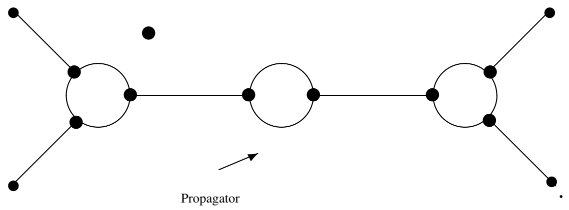
im Impulsraum

$$\tau_n^{\mathrm{amp}}(p_1,\ldots,p_n)=\tilde{\tau}_n(p_1,\ldots,p_n)\underbrace{\left[i\Delta(p_1)\ldots i\Delta(p_n)\right]}_{\text{Propagatoren zu jeder äußeren Linie}}{}^{-1}$$

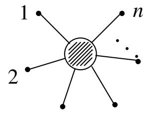
Man erhält die amputierte n-Punkt-Funktion durch „Abschneiden“ der äußeren Propagatoren.

Vertexfunktionen $\Gamma_n(p_1,\ldots,p_n)$

sind zusammenhängende, amputierte 1-Teilchen-irreduzible n-Punkt-Funktionen (1-Teilchen-irreduzibel heißt, man kann sie nicht „aufschneiden“ in mehrere Graphen wie z.B.



I.a. enthalten 1-Teilchen-irred. Graphen Loops. Das Symbol für die Vertexfunktionen ist



5.4 Asymptotische Felder

5.4.1 Asymptotenbedingung, in/out-Zustände

Gegeben sei ein Skalarfeld $\phi(x)$ mit WW so, daß $\phi(x)$ für $t\to\pm\infty$ in freies Feld übergeht. Für $t\to-\infty$ erzeuge das Feld $\phi_{\mathrm{in}}(x)$ freie Zustände $|\mathrm{in}\rangle$, für $t\to\infty$ erzeuge entsprechend das Feld $\phi_{\mathrm{out}}(x)$ die Zustände $|\mathrm{out}\rangle$. Ein Basiswechsel zwischen diesen Zuständen erfolgt mittels der S-Matrix .

Grundlegende Annahmen

- Die freien $|\mathrm{in}\rangle$ und $|\mathrm{out}\rangle$-Zustände bilden jeweils eine Basis des Fock-Raumes und zwar auch mit Wechselwirkung.
- Die Grundzustände entsprechen sich $|0\rangle_{\mathrm{in}}=|0\rangle_{\mathrm{out}}$.
- Das Spektrum von P^μ hat die Eigenschaft $P^0\geqslant 0, P^2\geqslant 0$ (s. Abb. 5.1). Z.B.: $p^2=(p_1+p_2)^2\geqslant 4m^2$
- Schwacher Asymptotenlimes. Es ist nicht möglich im Sinne eines Operator-Limes folgendes zu fordern („starker Limes“)

  $$\text{nicht möglich: } \phi(x)\xrightarrow{t\to\pm\infty}\mathrm{const}\cdot\phi_{\substack{\mathrm{in}\\ \mathrm{out}}}(x).$$

  Das geht nicht, da man bei Erfüllung dieser Forderung für die freien und für die wechselwirkenden Felder dieselben Vertauschungsrelationen (bis auf einen Faktor Z) erhalten würde, woraus sich im Prinzip dieselben Felder ergeben würden, was aber nicht richtig ist.

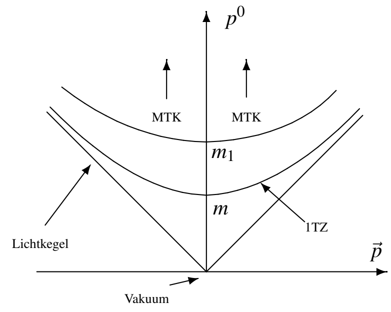


Abbildung 5.1: m_1: Schwelle zum Mehrteilchenkontinuum (MTK) (einfachster Fall $m_1 = 2m$); „1TZ“: 1-Teilchenzustand auf Massenschale ($p^2 = m^2$)

Stattdessen fordert man den sog. *schwachen Asymptotenlimes*, der eine Bedingung an das Matrix-Element stellt (nach Lehmann, Symanzik und Zimmermann)

LSZ-Bedingung

$$\boxed{\lim_{t\to\pm\infty}\langle b|\phi(x)|a\rangle = \sqrt{Z}\langle b|\phi_{\substack{\text{in}\\\text{out}}}(x)|a\rangle \quad \forall\,|a\rangle\,,|b\rangle\,;\; Z\in\mathbb{R}, Z\geqslant 0}. \tag{5.12}$$

Wenn man die LSZ-Bed. streng formulieren möchte, muß man wohl von einem „verschmierten“ Feld ϕ^f ausgehen

$$\phi^f_{\substack{\text{in}\\\text{out}}} = \int \mathrm{d}^3x\, f^*(x)\, \overleftrightarrow{\partial}_0\, \phi_{\substack{\text{in}\\\text{out}}}(x),$$

mit f, einer (normierbaren) Lösung von $(\Box + m^2)f = 0$. Mit normierbaren Zuständen $|a\rangle\,, |b\rangle$ wird dann (5.12) zu

$$\lim_{t\to\pm\infty}\langle b|\phi^f|a\rangle = \sqrt{Z}\langle b|\phi^f_{\substack{\text{in}\\\text{out}}}|a\rangle.$$

Die in/out-Felder sind wie folgt normiert

$$\langle 0|\phi_{\substack{\text{in}\\\text{out}}}(x)|p\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}e^{-ipx}.$$

$$\longrightarrow \lim_{t\to\pm\infty}\langle 0|\phi(x)|p\rangle = \sqrt{Z}\cdot\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}e^{-ipx}$$

Der phys. Bedeutung dieses Z-Faktors wird im nächsten Abschnitt nachgegeangen. Es gilt die folgende Formel

$$\boxed{\langle 0|\phi(x)|p\rangle = \sqrt{Z}\langle 0|\phi_{\substack{\text{in}\\\text{out}}}(x)|p\rangle \quad \forall \text{1-Teilchen-Zust.}} \tag{5.13}$$

Zum Beweis betrachte man $(\Box + m^2)\phi(x) = j(x)$ z.B. mit $j = 3g\phi^3$, was die formale Lösung

$$\phi(x) = \sqrt{Z}\phi_{\substack{\text{in}\\\text{out}}}(x) + \int \mathrm{d}^4x'\, G_{\substack{\text{ret}\\\text{av}}}(x,x')\,j(x')$$

hat und damit

$$\langle 0|\phi(x)|p\rangle = \sqrt{Z}\langle 0|\phi_{\substack{\text{in}\\\text{out}}}(x)|p\rangle + \underbrace{\int \mathrm{d}^4x'\, G_{\substack{\text{ret}\\\text{av}}}(x,x')\langle 0|j(x)|p\rangle}_{=0}.$$

Das Integral ist Null, da

$$\langle 0|j(x)|p\rangle = \langle 0|(\Box + m^2)\phi(x)|p\rangle = (\Box + m^2)\underbrace{\langle 0|\phi(x)|p\rangle}_{=\langle 0|e^{iPx}\phi(0)e^{-iPx}|p\rangle} = \underbrace{(\Box + m^2)e^{-ipx}}_{=0\ (p\ \text{on-shell}}\langle 0|\phi(0)|p\rangle.$$

Dabei wurde benutzt

$$\boxed{\phi(x) = e^{iPx}\phi(0)e^{-iPx}}, \qquad \text{da inf. } \partial_\mu\phi = i\,[P_\mu, \phi]\,. \tag{5.14}$$

5.4.2 Källen-Lehmann-Darstellung

Gegeben sei ein skalarer Propagator $i\Delta(x-y) = \langle 0|T\phi(x)\phi(y)|0\rangle$. Unter Benutzung von (5.14) und Beachtung von

$$e^{\pm iPx}|\alpha\rangle = e^{\pm ip_\alpha x}|\alpha\rangle, \qquad \text{spez. } e^{\pm iPx}|0\rangle = e^0|\alpha\rangle = 1|\alpha\rangle \tag{5.15}$$

wird daraus

$$\longrightarrow i\Delta(x) = \langle 0|T\phi(x)\phi(0)|0\rangle. \tag{5.16}$$

Sei $|\alpha\rangle$ ein System von vollständigen Zuständen

$$\text{d.h.} \quad \sum_\alpha |\alpha\rangle\langle\alpha| = \mathbf{1},$$

dann wird aus (5.16) durch Einfügen dieses Systems

$$\begin{aligned}
i\Delta(x) &= \sum_\alpha \Big\{ \langle 0|\phi(x)|\alpha\rangle\langle\alpha|\phi(0)|0\rangle\Theta(x^0) + \langle 0|\phi(0)|\alpha\rangle\langle\alpha|\phi(x)|0\rangle\Theta(-x^0) \Big\} \\
&= \sum_\alpha \Big|\langle 0|\phi(0)|\alpha\rangle\Big|^2 \Big\{ \Theta(x^0)e^{-iP_\alpha x} + \Theta(-x^0)e^{iP_\alpha x} \Big\} \\
&= \int \mathrm{d}^4 q\, \underbrace{\sum_\alpha \delta(q - P_\alpha)\Big|\langle 0|\phi(0)|\alpha\rangle\Big|^2}_{=:\rho(q)\cdot\frac{1}{(2\pi)^3}} \Big\{ \Theta(x^0)e^{-iqx} + \Theta(-x^0)e^{iqx} \Big\}
\end{aligned} \tag{5.17}$$

Bei der vorletzten Umformung wurden (5.14) und (5.15) benutzt.

Das in (5.17) definierte $\rho(q)$ hat folgende Eigenschaften

- $\rho(\Lambda q) = \Lambda\rho(q)$ Lorentz-Skalar, d.h. $\rho(q) = \rho(q^2)$.
- Nach Voraussetzung (s. 47) tragen nur Beiträge von $P^0_\alpha \geqslant 0$ bei

  $$\longrightarrow \rho(q) = \rho(q^2)\cdot\Theta(q^0).$$

- Ebenfalls nach Vor. trägt nur $P^2_\alpha \geqslant 0$ bei

  $$\longrightarrow \rho(q) = \begin{cases} \rho(q^2)\cdot\Theta(q^0), \rho \geqslant 0, \text{reell für } q^2 \geqslant 0 \\ 0 \text{ sonst} \end{cases} \tag{5.18}$$

Damit wird aus (5.17)

$$
\begin{aligned}
i\Delta(x) &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^4q\,\rho(q^2)\Theta(q^0)\Big\{\Theta(x^0)e^{-ix}+\Theta(-x^0)e^{ix}\Big\}\\
&\overset{q^2\gtreqless 0}{=} \int\limits_0^{\infty}\mathrm{d}\mu^2\rho(\mu^2)\underbrace{\frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^4q\delta(q^2-\mu^2)\Theta(q^0)\Big\{\Theta(x^0)e^{-ix}+\Theta(-x^0)e^{ix}\Big\}}\\
&\qquad\overset{(*)}{=} \tfrac{1}{(2\pi)^3}\int\tfrac{\mathrm{d}^3q}{2q^0}\Big\{\Theta(x^0)e^{-ix}+\Theta(-x^0)e^{ix}\Big\}\Big|_{q^0=+\sqrt{\vec{q}^2+\mu^2}}\\
&\qquad= iD(x,\mu^2)\quad \text{freier Propagator zur Masse } \mu\\
&\qquad= i\int\tfrac{\mathrm{d}^4q}{(2\pi)^4}\,\tfrac{1}{q^2-\mu^2+i\varepsilon}
\end{aligned}
$$

Bei der Umformung $(*)$ wurde folgende Formel für die δ-Funktion benutzt

$$
\int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta\big(f(x)\big)=\sum_i\frac{1}{\big|f'(x_i^0)\big|},\qquad \longrightarrow \int \mathrm{d}q^0\delta(q^{0^2}-\vec{q}^2-\mu^2)=\frac{1}{2q^0}\Big|_{q^2=\mu^2\longrightarrow q^0=\sqrt{\vec{q}^2+\mu^2}}
$$

Damit ergibt sich schließlich die *Källen-Lehman-Darstellung* (Spektraldarstellung)

$$
\longrightarrow \boxed{\Delta(x)=\int\limits_0^{\infty}\mathrm{d}\mu\,\rho(\mu^2)D(x,\mu^2),\ \rho\geqslant 0}. \tag{5.19}
$$

$\rho(\mu^2)$ bezeichnet man als *Spektralfunktion*

Beitrag der 1-Teilchenzustände

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(2\pi)^3}\rho(q^2) &= {}'\sum_p{}'\delta^4(q-p)\Big|\big\langle 0\big|\phi(0)\big|p\big\rangle\Big|^2+\sum_{\text{Mehrteilchen}}{}_{\text{hierbei ist } q^2\geqslant m^2}\\
&\overset{(5.13),(3.10)}{=}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{2p^0}\delta^4(q-p)\cdot Z\cdot\frac{1}{(2\pi)^3}\cdot 1+\sum\ldots\\
&=\int \mathrm{d}^4p\,\delta(p^2-m^2)\Theta(p^0)\cdot\delta^4(q-p)Z\frac{1}{(2\pi)^3}+\sum\ldots\\
&=Z\delta(q^2-m^2)\Theta(q^0)\frac{1}{(2\pi)^3}\underbrace{+\Theta(q^2-m_1^2)\Theta(q^0)\sigma(q^2)\frac{1}{(2\pi)^3}}_{\text{Mehrteilchenzust.}}\\
&\overset{(5.18)}{=}\frac{1}{(2\pi)^3}\rho(q^2)\Theta(q^0)
\end{aligned}
$$

$$
\longrightarrow\boxed{\rho(q^2)=Z\delta(q^2-m^2)+\Theta(q^2-m_1^2)\cdot\sigma(q^2)}.
$$

Setzt man dies in die Källen-Lehman-Darstellung (5.19) ein, ergibt sich

$$
\boxed{\Delta(x)=ZD(x,m^2)+\int\limits_{m_1^2}^{\infty}\mathrm{d}\mu^2\,\sigma(\mu^2)D(x,\mu^2)}.
$$

Im Impulsraum

$$
\boxed{\Delta(p)=\frac{Z}{p^2-m^2+i\varepsilon}+\int\limits_{m_1^2}^{\infty}\mathrm{d}\mu^2\,\sigma(\mu^2)\frac{1}{p^2-\mu^2+i\varepsilon}}. \tag{5.20}
$$

Dabei ist m_1 die „leichteste Masse“ im Mehrteilchen-Kontinuum (s. Abb. 5.1) z.B. $m_1=2m$.

Folgerungen

- $\Delta(p)$ hat Pol bei $p^2 = m^2$ mit dem Residuum Z. An dieser Stelle kann man auch die physikalische Bedeutung des Z-Faktors erkennen. Er beschreibt nämlich den Anteil der 1-Teilchen-Zustände, die von dem wechselwirkenden Feld $\phi(x)$ erzeugt werden (bzw. vom wechselwirkenden Propagator beschrieben werden), welches ja auch Mehrteilchenzustände erzeugt.

- $\Delta(p)$ hat einen Schnitt längs der positiven reellen Achse, der bei $q^2 = m^2$ beginnt:

$$\Im\Delta(p) \begin{cases} \neq 0 & \text{für } q^2 > m_1^2 \\ = 0 & \text{für } q^2 \leqslant m_1^2 \end{cases}.$$

Man erhält also (Übungen)

$$1 = Z + \int\limits_{m_1}^{\infty} \mathrm{d}\mu^2\, \sigma(\mu^2) \longrightarrow \boxed{0 \leqslant Z \leqslant 1}.$$

Dieses Ergebnis ergibt sich, wenn man in Gl. (5.16) statt des zeitgeordneten Produktes einen Kommutator einsetzt, d.h. $\Delta(x) = \langle 0 \big| [\phi(x), \phi(0)] \big| 0 \rangle$ und davon die Spektraldarstellung berechnet. Durch Zeitableitung erhält man dann unter Beachtung von (3.1) $Z \leqslant 1$.

Für einen Dirac-Propagator aus, erhält man die Spektraldarstellung

$$S(p) = \frac{Z}{\not p - m + i\varepsilon} + \int\limits_{m_2^2}^{\infty} \mathrm{d}\mu^2\, \frac{\sigma_1(\mu^2) \not p + \sigma_2(\mu^2)}{p^2 - \mu^2 + i\varepsilon}, \quad \sigma_1, \sigma_2 \geqslant 0,$$

bei Paritätserhaltung. Für den Fall nichterhaltener Parität wird daraus

$$S(p) = \frac{Z}{\not p - m + i\varepsilon} + \int\limits_{m_2^2}^{\infty} \mathrm{d}\mu^2\, \frac{\sigma_1(\mu^2) \not p + \overline{\sigma}_1(\mu^2) \not p \gamma_5 + \sigma_2(\mu^2) + \overline{\sigma}_2(\mu^2)\gamma_5}{p^2 - \mu^2 + i\varepsilon}.$$

5.5 LSZ-Theorem

(Nach Lehmann, Symanzik, Zimmermann)

Gegeben seien asymptotische freie Felder $\phi_{\text{in}}(x), \phi_{\text{out}}(x)$, welche aus dem schwachen Asymptoten-Limes (s. (5.12)) des wechselwirkenden Feldes $\phi(x)$ hervorgehen.

Zur Bestimmung der S-Matrix sei ein unitärer Operator S gegeben, welcher die Basis der $|\text{in}\rangle$-Zustände in die Basis der $|\text{out}\rangle$-Zustände überführt

$$|\text{in}\rangle = S\,|\text{out}\rangle\,, \quad \langle \text{out}\big| = \langle \text{in}\big| \mathrm{S}^{-1}.$$

Und somit die in-Felder in die out-Felder

$$\phi_{\text{out}}(x) = S^{-1}\phi_{\text{in}}.$$

Damit ergeben sich die S-Matrix-Elemente aus

$$S_{\beta\alpha} = \langle \beta, \text{out} \big| \alpha, \text{in} \rangle = \langle \beta, \text{out} \big| S \big| \alpha, \text{in} \rangle,$$

wobei α und β weitere Quantenzahlen zur Charakterisierung des jeweiligen Zustands sind. In der Störungs-Theorie werden die S-Matrix-Elemente approximativ berechnet, während hier ein allgemeiner Zusammenhang zwischen $S_{\beta\alpha}$ und den Green-Funktionen abgeleitet wird. Die Vorgehensweise besteht darin, die Teilchen aus den in- bzw. out-Zuständen mittels Ersetzung durch die Feldoperatoren zu eliminieren.

1. Schritt: Eliminiere Teilchen mit Impuls p aus $|\alpha,\mathrm{in}\rangle$. Ab jetzt bezeichnet man mit $|\alpha,\mathrm{in}\rangle \to |\alpha_1,\mathrm{in}\rangle$ und mit $|\alpha_1 p,\mathrm{in}\rangle$ den Zustand ohne p. Als Annahme benötigt man noch, daß alle out-Zsutände von den in-Zuständen verschieden sind.

$$S_{\beta\alpha} = \langle\beta,\mathrm{out}|\alpha p,\mathrm{in}\rangle = \langle\beta,\mathrm{out}|a^+_{\mathrm{in}}(p)|\alpha_1\mathrm{in}\rangle = \langle\beta,\mathrm{out}|a^+_{\mathrm{in}}(p) - a^+_{\mathrm{out}}(p)|\alpha_1\mathrm{in}\rangle \tag{5.21}$$

Benutzt man nun die Darstellung für freie Felder

$$\phi_{\substack{\mathrm{in}\\ \mathrm{out}}}(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{2p^0}\big(a_{\substack{\mathrm{in}\\ \mathrm{out}}}(p) f_p(x) + a^+_{\substack{\mathrm{in}\\ \mathrm{out}}}(p) f^*_p(x)\big),$$

mit $f_p(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-ipx}$, erhält man die (zeitunabhängige) Größe

$$a^+_{\substack{\mathrm{in}\\ \mathrm{out}}} = -i\int \mathrm{d}^3 x f_p(x) \overleftrightarrow{\partial_0}\, \phi_{\substack{\mathrm{in}\\ \mathrm{out}}}(x), \tag{5.22}$$

mit

$$a \overleftrightarrow{\partial_0} b = a\partial_0 b + (\partial_0 a) b \tag{5.23}$$

Dies eingesetzt in (5.21) ergibt

$$\begin{aligned} S_{\beta\alpha} &= i\int \mathrm{d}^3 x f_p(x) \overleftrightarrow{\partial_0} \Big[\langle\beta,\mathrm{out}|\phi_{\mathrm{out}}(x)|\alpha_1\mathrm{in}\rangle - \langle\beta,\mathrm{out}|\phi_{\mathrm{in}}(x)|\alpha,\mathrm{in}\rangle\Big] \\ &= i\int \mathrm{d}^3 x f_p(x) \overleftrightarrow{\partial_0} \Big[\lim_{x^0\to\infty}\langle\beta,\mathrm{out}|\phi_{\mathrm{out}}(x)|\alpha_1\mathrm{in}\rangle - \lim_{x^0\to-\infty}\langle\beta,\mathrm{out}|\phi_{\mathrm{in}}(x)|\alpha,\mathrm{in}\rangle\Big], \end{aligned} \tag{5.24}$$

Die Limites sind dabei als schwache Asymptoten-Limites zu verstehen. Esetzt man nun die in- und out-Felder mittels (5.12), geht es weiter mit

$$\begin{aligned} (5.24) &= i\int \mathrm{d}^3 x f_p(x) \overleftrightarrow{\partial_0} \big(\lim_{x^0\to\infty}\frac{1}{\sqrt{Z}}\langle\beta,\mathrm{out}|\phi(x)|\alpha_1\mathrm{in}\rangle \\ &\qquad - \lim_{x^0\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{Z}}\langle\beta,\mathrm{out}|\phi(x)|\alpha_1,\mathrm{in}\rangle\big) \\ &= \frac{i}{\sqrt{Z}}\left(\lim_{x^0\to\infty} - \lim_{x^0\to-\infty}\right)\int \mathrm{d}^3 x f_p(x) \overleftrightarrow{\partial_0}\, \langle\beta,\mathrm{out}|\phi(x)|\alpha_1,\mathrm{in}\rangle \\ &= \frac{i}{\sqrt{Z}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x^0\left(\int \mathrm{d}^3 x\, \partial_0\Big[f_p(x) \overleftrightarrow{\partial_0} \underbrace{\langle\beta,\mathrm{out}|\phi(x)|\alpha_1,\mathrm{in}\rangle}_{=:g(x)}\Big]\right) \\ &\overset{(5.23)}{=} \frac{i}{\sqrt{Z}}\int \mathrm{d}^4 x\{f_p(x)\big(\partial_0^2 g(x)\big) - \big(\partial_0 f_p(x)\big) g(x)\} \end{aligned}$$

Mit $(\Box + m^2) f_p(x) = 0 \longrightarrow \partial_0^2 f_p(x) = (\Delta - m^2) f_p(x)$ folgt aus obiger Gleichung

$$\longrightarrow S_{\beta\alpha_1} = \frac{i}{\sqrt{Z}}\int \mathrm{d}^4 x\Big\{f_p(x)\big(\partial_0^2 g(x)\big) - \big((\Delta - m^2) f_p(x)\big) g(x)\Big\}$$

Führt man nun eine räumliche partielle Integration durch, d.h.

$$\int(\Delta f) g = \underbrace{\int \vec{\nabla}(\vec{\nabla} f\cdot g)}_{=0} - \int \vec{\nabla} f\cdot\vec{\nabla} g = \underbrace{-\int \vec{\nabla}(f\cdot\vec{\nabla} g)}_{=0} + \int f\Delta g,$$

erhält man schließlich

$$\longrightarrow \boxed{S_{\beta\alpha_1} = \frac{i}{\sqrt{Z}}\int \mathrm{d}^4 x\big(f_p(x)(\Box + m^2)\langle\beta,\mathrm{out}|\phi(x)|\alpha_1,\mathrm{in}\rangle\big)}. \tag{5.25}$$

2. Schritt: Eliminiere Teilchen mit Impuls p' aus $|\beta, \text{out}\rangle$. Die Bezeichnung ist $\left|\beta, \text{out}\right\rangle \rightarrow \left|\beta_1 p, \text{out}\right\rangle$, während $\left|\beta, \text{out}\right\rangle$ den Zustand ohne p' markiert. Asugehend von dem Matrix-Element in (5.25) und Durchführung der zu Schritt 1 analogen Rechnungen erhält man

$$\begin{aligned}\left\langle\beta, \text{out}\middle|\phi(x)\middle|\alpha_1, \text{in}\right\rangle &= \left\langle\beta_1 p', \text{out}\middle|\phi(x)\middle|\alpha_1, \text{in}\right\rangle \\ &= \left\langle\beta_1, \text{out}\middle|a_{\text{out}}(p')\phi(x) - \phi_{\text{in}}(x)a_{\text{in}}(p')\middle|\alpha_1, \text{in}\right\rangle \end{aligned} \tag{5.26}$$

Mit einer zu (5.22) analogen Gleichung

$$a_{\substack{\text{in}\\\text{out}}}(p) = -i\int \mathrm{d}^3y f_p^*(y) \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi_{\substack{\text{in}\\\text{out}}}(y),$$

erhält man

$$\begin{aligned}&(5.26)\\ &= -i\int \mathrm{d}^3y\left\langle\beta_1, \text{out}\middle|\phi_{\text{out}}(y)\phi(x) - \phi(x)\phi_{\text{in}}(y)\middle|\alpha_1, \text{in}\right\rangle \overleftrightarrow{\partial}_{y_0} f_p^*(y)\\ &= \frac{i}{\sqrt{Z}}\int \mathrm{d}^3y \lim_{y^0\to\infty}\left\langle\beta_1, \text{out}\middle|\phi(y)\phi(x)\middle|\alpha_1, \text{in}\right\rangle \overleftrightarrow{\partial}_{y_0} f_p^*(y) - \\ &\qquad\qquad \lim_{y^0\to-\infty}\left\langle\beta_1, \text{out}\middle|\phi(y)\phi(x)\middle|\alpha_1, \text{in}\right\rangle \overleftrightarrow{\partial}_{y_0} f_p^*(y)\\ &= \frac{i}{\sqrt{Z}}\int \mathrm{d}^4y\left\langle\beta_1, \text{out}\middle|T\phi(y)\phi(x)\middle|\alpha_1, \text{in}\right\rangle(\overleftarrow{\Box}_y + m^2)f_p^*(y)\end{aligned} \tag{5.27}$$

$\longrightarrow$ Zurück zu Schritt 1![2]

3. Schritt: Man führt Schritt 1+2 solange durch, bis alle Impulse aus den in- und out-Zuständen $|p_1', \ldots, p_n', \text{out}\rangle$ und $|p_1, \ldots, p_m, \text{in}\rangle$ eliminiert sind und erhält als Ergebnis

$$\begin{aligned}S_{\beta\alpha} &= \left\langle p_1', \ldots, p_n', \text{out}\middle|p_1, \ldots, p_m, \text{in}\right\rangle\\ &= \left(\frac{i}{\sqrt{Z}}\right)^{n+m}\int \mathrm{d}^4x_1\cdots\int \mathrm{d}^4x_m\int \mathrm{d}^4y_1\cdots\int \mathrm{d}^4y_n\\ &\quad\cdot f_{p_1}(x_1)\ldots f_{p_m}(\Box_{x_1} + m^2)\cdots(\Box_{x_m} + m^2)\underbrace{\left\langle 0\middle|T\phi(y_1)\cdots\phi(x_m)\middle|0\right\rangle}_{\equiv\tau_{(n+m)}(x_1,\ldots,y_n)}\\ &\quad\cdot(\overleftarrow{\Box}_{y_1} + m^2)\cdots(\overleftarrow{\Box}_{y_n} + m^2)f^*_{p_1'}(y_1)\ldots f^*_{p_n'}(y_n)\end{aligned}$$

4. Schritt: Übergang zur Impulsraum-Darstellung. Als Schreibweise führt man ein

$$\begin{aligned}m + n =: N, \quad &(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) = (x_1, \ldots, x_N)\\ &(q_1, \ldots, q_N) = (p_1, \ldots, p_m, -p_1', \ldots, p_n').\end{aligned}$$

Desweiteren ist es geeigneter q^0 (während der Rechnung) unabhängig zu wählen (also i.a. nicht mehr on-shell). Damit

$$\begin{aligned}S_{\beta\alpha} = \left(\frac{i}{\sqrt{Z}}\right)^N \cdot \quad &\left\{\int \mathrm{d}^4x_1 \cdot \int \mathrm{d}^4x_N\, e^{-i(q_1x_1+\cdots+q_Nx_N)}\right.\\ &\left.\cdot(\Box_1 + m^2)\ldots(\Box_N + m^2)\tau_N(x_1, \ldots, x_N)\right\}_{q_i^2=m^2} \cdot \left(\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\right)^N\end{aligned} \tag{5.28}$$

[2] beachte dabei

$$\lim_{t\to\infty} a(t)b(t_0) - \lim_{t\to\infty} b(t_0)a(t) \equiv \int \mathrm{d}t \frac{\partial}{\partial t} Ta(t)b(t_0)$$

Die geschweifte Klammer in obiger Gleichung entspricht

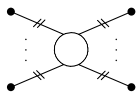
$$\{\cdots\} = (-q_1^2 + m^2)\dots(-q_N^2 + m^2)\tilde{\tau}_N(q_1,\dots,q_N),$$

mit $\tilde{\tau}_N$, welches in (5.11) eingeführt wurde als

$$\tilde{\tau}(q_1,\dots,q_N)(2\pi)^4\delta^4\left(\sum_i q_i\right) = \int \mathrm{d}^4x_1 \dots \int \mathrm{d}^4x_N \tau_N(x_1,\dots,x_N)e^{-i(1_1x_1+\ldots+q_Nx_N)}.$$

Damit ist also das S-Matrix-Element aus (5.28)

$$S_{\beta\alpha} = \left(\frac{1}{\sqrt{Z}(2\pi)^{3/2}}\right)^N \cdot \left(\left(\frac{i}{q_1^2 - m^2}\right)^{-1} \cdots \left(\frac{i}{q_N^2 - m^2}\right)^{-1} \tilde{\tau}_N(q_1,\dots,q_N)\right)_{\substack{q_i^2=m^2 \\ \text{(on-shell)}}}$$



Was also gemacht wird, ist, daß man die äußeren Beine amputiert und stattdessen die Wellenfunktionen im Impulsraum hinschreibt (hier jeweils $\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}$ für skalare Teilchen).

Um das ganze auf eine verallgemeinerbare Form zu bringen, geht man von der Impulsraum-Wellenfunktion aus

$$f_p(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}e^{-ipx} \equiv \varphi(p)e^{-ipx} = \langle 0 | \phi_{\substack{\text{in} \\ \text{out}}}(x) | p \rangle$$

und erhält damit

$$\boxed{\begin{aligned} S_{\beta\alpha} = &\left(\frac{1}{\sqrt{Z}}\right)^N \varphi(p_1)\cdots\varphi(p_m) \\ &\cdot \left(\left(\frac{i}{q_1^2 - m}\right)^{-1} \cdots \left(\frac{i}{q_N^2 - m}\right)^{-1} \tilde{\tau}_N(q_1,\dots,q_N)\right)_{\text{on-shell}} \\ &\cdot \varphi^*(p_1')\cdots\varphi^*(p_n') \end{aligned}}$$

Für Vektorfelder ist $\varphi(p) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\varepsilon_\mu(p)$. Das „Ergebnis“ des LSZ-Theorems für Dirac Felder wird unten erwähnt.

Folgerungen

- $\tilde{\tau}_N(q_1,\dots,q_N)$ hat Pole für $q_i^2 = m^2$.
- Zu $S_{\beta\alpha}$ tragen nur die zusammenhängenden n-Punkt-Funktionen bei (das liegt an der Annahme über paarweise verschiedene Impulse im Anfangs- und Endzustand). Das stimmt allerdings auch nur in niedrigeren Ordnung, wie im nächsten Kapitel ersichtlich wird.
- Ersetzt man die freien Propagatoren $D = \frac{1}{q^2-m^2}$ durch die wechselwirkenden (s. (5.20)), welche sich

nur um einen Faktor Z von den freien unterscheiden (on-shell), erhält man

$$\begin{aligned}
\tilde{\tau}_N(q_1,\dots,q_N) &= i\Delta(q_1)\dots i\Delta(q_N)\tilde{\tau}_{N,\text{amp}}(q_1,\dots,q_N)\\
S_{\beta\alpha} &\sim \left(\frac{1}{\sqrt{Z}}\right)^N \left\{D^{-1}(q_1)\dots D^{-1}(q_N)\Delta(q_1)\dots\Delta(q_N)\tilde{\tau}_{N,\text{amp}}\right\}_{\text{on-shell}}\\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{Z}}\right)^N Z^N\left(\tilde{\tau}_{N,\text{amp}}(q_1,\dots,q_N)\right)_{\text{on-shell}}\\
&= Z^{N/2}\left(\tilde{\tau}_{N,\text{amp}}(q_1,\dots,q_N)\right)_{\text{on-shell}}
\end{aligned}$$

Von jeder äußeren Wellenfunktion erhält man nun einen Faktor $\sqrt{Z}$ [3].

Dirac-Feld

$$\begin{aligned}
S_{\beta\alpha} = &\left(\frac{1}{\sqrt{Z}}\right)^N \overline{\varphi}(p_1')\dots\overline{\varphi}(p_N')\\
&\cdot\left(\left(\frac{i}{\not{q}_1-m}\right)^{-1}\cdots\left(\frac{i}{\not{q}_N-m}\right)^{-1}\cdots\cdot\tilde{\tau}_N(q_1,\dots,q_N)\right)_{\text{on-shell}}\\
&\cdot\varphi(p_1)\cdots\varphi(p_N)
\end{aligned}$$

mit den Feldern

$$\varphi(p_i) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\begin{cases} u(p_i) & \text{mit } p_i \text{ auslaufendes Teilchen}\\ v(p_i) & \text{mit } p_i \text{ auslaufendes Anti-Teilchen}\end{cases}$$

$$\overline{\varphi}(p_i') = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\begin{cases} \overline{u}(p_i') & \text{mit } p_i' \text{ auslaufendes Teilchen}\\ \overline{v}(p_i') & \text{mit } p_i' \text{ auslaufendes Anti-Teilchen}\end{cases}$$

[3] Dadurch, daß man außen die vollständigen Propagatoren (statt den freien) amputiert hat, muß man in den äußeren Linien keine Korrekturen (höhere Ordnungen) durchführen. (Dieser Kommentar wird im nächsten Kapitel bzw. im zweiten Teil des Skripts deutlich)

Kapitel 6

Störungstheorie und Feynman-Graphen

6.1 Störungsreihe für die τ-Funktionen

Gegeben sei ein wechselwirkendes Feld $\phi(x) = \phi^+(x)$, der zugehörige kanonische Impuls $\Pi(x)$ und das freie in-Feld $\phi_{\text{in}}(x)$ und dessen kanonischer Impuls $\Pi_{\text{in}}(x)$.

Grundvoraussetzungen für die Störungsrechnung

Es gibt einen unitären Operator $U(t)$ so, daß

$$\phi_{\text{in}}(x) = U(t)\phi(x)U^{-1}(t), \qquad \Pi_{\text{in}}(x) = U(t)\Pi(x)U^{-1}(t). \tag{6.1}$$

Im Rahmen der Quantenmechanik kann man diese Forderung streng beweisen, nicht aber in der QFT, wo sie streng mathematisch sogar falsch ist .
Der Hamilton-Operator setzt sich aus einem freien und einem wechselwirkenden Teil zusammen

$$H = H_0 + H_{\text{int}}$$

In der Quantenfeldtheorie ergibt sich der Hamilton-Operator aus der Dichte

$$H = \int \mathrm{d}^3x \mathcal{H}\big(\phi(x), \Pi(x)\big) = H(\phi, \Pi)$$

Damit ist H ein Funktional der Felder und weil es ein Polynom in den Feldern ist (s. (6.1)), gilt gemäß (6.1)

$$U(t)H(\phi, \Pi)U^{-1}(t) = H(\phi_{\text{in}}, \Pi_{\text{in}}).$$

Bewegungsgleichungen

ergeben sich aus

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= i\,[H, \phi] & \dot{\Pi} &= i\,[H, \Pi] \\ \dot{\phi}_{\text{in}} &= i\,[H_0(\phi_{\text{in}}, \Pi_{\text{in}}), \phi_{\text{in}}] & \dot{\Pi}_{\text{in}} &= i\,[H_0, \Pi_{\text{in}}] \end{aligned} \tag{6.2}$$

Ausführen der Zeitableitungen ergibt jeweils

$$
\begin{aligned}
\dot{\phi}_{\text{in}} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(U\phi U^{-1}) = \dot{U}U^{-1}\underbrace{U\phi U^{-1}}_{=\phi_{\text{in}}} + \underbrace{U\phi U^{-1}}_{=\phi_{\text{in}}}\underbrace{U\dot{U}^{-1}}_{=-\dot{U}U^{-1}} + U\underbrace{\dot{\phi}}_{=i[H,\phi]}U^{-1} \\
&= \left[\dot{U}U^{-1}, \phi_{\text{in}}\right] + i\left[H(\phi_{\text{in}}, \Pi_{\text{in}}), \phi_{\text{in}}\right] \\
&\overset{(6.2)}{\longrightarrow} \left[\dot{U}U^{-1}, \phi_{\text{in}}\right] + i\left[\underbrace{H(\phi_{\text{in}}, \Pi_{\text{in}}) - H_0(\phi_{\text{in}}, \Pi_{\text{in}})}_{=H_{\text{int}}(\phi_{\text{in}}, \Pi_{\text{in}})}, \Phi_{\text{in}}\right] = 0 \\
&\iff \left[\dot{U}U^{-1} + iH_{\text{int}}(\phi_{\text{in}}, \Pi_{\text{in}}), \phi_{\text{in}}\right] = 0.
\end{aligned}
$$

Analog erhält man für die kanonischen Impulse

$$
\left[\dot{U}U^{-1} + iH_{\text{int}}(\phi_{\text{in}}, \Pi_{\text{in}}), \Pi_{\text{in}}\right] = 0.
$$

Da die linke Seite des Kommutators sowohl mit ϕ, als auch mit Π vertauscht, kann sie nur einer Zahl entsprechen

$$
\dot{U}U^{-1} + iH_{\text{int}}(\phi_{\text{in}}, \Pi_{\text{in}}) = i\varepsilon(t) \in \mathbb{C}. \tag{6.3}
$$

Später wird gezeigt, daß $\varepsilon(t) = 0$ möglich ist, bzw., daß das ε wieder herausfällt. Setzt man dies voraus, erhält man als DGl. für die $U(t)$

$$
\longrightarrow i\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = H_{\text{int}}(\phi_{\text{in}}, \Pi_{\text{in}})U(t) \tag{6.4}
$$

Man führt folgende Schreibweise ein

$$
H_{\text{int}}(\phi_{\text{in}}, \Pi_{\text{in}}) = \int \mathrm{d}^3x \mathcal{H}_{\text{int}}\big(\phi_{\text{in}}(x), \Pi_{\text{in}}(x)\big) =: H_{\text{int}}(x^0) \equiv H_{\text{int}}(t).
$$

Eine zu (6.4) äquivalente Gleichung mit den Anfangsbedingungen

$$
U(t_0, t_0) = \mathbf{1}, \qquad U(t, t_0)U(t_0) = U(t)
$$

ist

$$
U(t, t_0) = \mathbf{1} - i\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t'\, H_{\text{int}}(t')U(t', t_0). \tag{6.5}
$$

Die iterative Lösung dieser Gleichung ergibt sich aus

$$
U(t, t_0) = \mathbf{1} + (-i)\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t'\, H_{\text{int}}(t') + (-i)^2\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t' \int_{t_0}^{t'} \mathrm{d}t''\, H_{\text{int}}(t')H_{\text{int}}(t'') + \cdots
$$

Bedenkt man

$$
(-i)^2\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t' \int_{t_0}^{t'} \mathrm{d}t''\, H_{\text{int}}(t')H_{\text{int}}(t'') = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t' \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t'' T H_{\text{int}}(t')H_{\text{int}}(t'')
$$

erhält man als „Lösung“

$$
\begin{aligned}
\longrightarrow U(t, t_0) \quad &= \mathbf{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_1 \cdots \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_n T H_{\text{int}}(t_1) \ldots H_{\text{int}}(t_n) \\
&=: T\exp\left(-i\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t' H_{\text{int}}(t')\right) \quad \text{(symbolisch)}
\end{aligned}
$$

(es ist zu bedenken, daß statt H_{int} immer $H_{\text{int}} - \varepsilon(t)$ stehen müßte.)

Eigenschaften

$$
\begin{aligned}
U(t,t) &= 1 & U(t_1,t_2)U(t_2,t_3) &= U(t_1,t_3)\\
U(t_1) &= U(t_1,-t)U(-t) & U^{-1}(t_1) &= U^{-1}(t)U(-t,t_1)
\end{aligned}
\tag{6.6}
$$

Bestimmung der τ-Funktion

Setzt man in die Definition der n-Punkt-Funktion (5.10) die Felder aus (6.1) ein, erhält man

$$
\begin{aligned}
\tau_n(x_1,\ldots,x_n) &:= \langle 0|T\phi(x_1)\ldots\phi(x_n)|0\rangle\\
&= \langle 0|TU^{-1}(t_1)\phi_{\text{in}}(x_1)U(t_1)U^{-1}(t_2)\phi_{\text{in}}(x_2)U(t_2)\cdots U^{-1}(t_n)\phi_{\text{in}}(x_n)U(t_n)|0\rangle
\end{aligned}
\tag{6.7}
$$

Wegen (6.6) ist

$$
\begin{aligned}
U^{-1}(t_1) &= U^{-1}(t)U(t,t_1), \qquad U(t_1)U^{-1}(t_2) = U(t_1,t_2)\\
U(t_n) &= U(t_n,-t)U(-t),
\end{aligned}
$$

so daß man aus (6.7) folgendes erhält

$$
\begin{aligned}
(6.7) &= \langle 0|U^{-1}(t)\{U(t,t_1)\phi_{\text{in}}(x_1)U(t_1,t_2)\phi_{\text{in}}(x_2)\ldots U(t_{n-1},t_n)\phi_{\text{in}}(x_n)U(t_n,-t)\}U(-t)|0\rangle\\
&= \langle 0|U^{-1}(0)T\{\cdots\}U(-t)|0\rangle && (6.8)\\
&= \langle 0|U^{-1}(t)\big(T[\phi_{\text{in}}(x_1)\ldots\phi_{\text{in}}(x_n)\underbrace{U(t,t_1)\ldots U(t_n,-t)}_{=U(t,-t)}]\big)U(-t)|0\rangle && (6.9)
\end{aligned}
$$

Die Reihenfolge in der geschweiften Klammer in (6.8) ist wegen der Zeitordnung egal. Läßt man nun $t\to\infty$ laufen

$$
(6.9) = \lim_{t\to\infty}\langle 0|T[\phi_{\text{in}}(x_1)\ldots\phi_{\text{in}}(x_n)U(t,-t)]|0\rangle
$$

und weiß (hier angegeben ohne Beweis), daß gilt

$$
\lim_{t\to\infty} U(\pm t)|0\rangle = \lambda_\pm|0\rangle,
$$

erhält man

$$
\begin{aligned}
\longrightarrow \tau_n(x_1,\ldots,x_n) &= \lambda_+^*\lambda_-\left\langle 0\middle|T\phi_{\text{in}}(x_1)\ldots\phi_{\text{in}}(x_n)\cdot\exp\left(-i\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t\int\mathrm{d}^3x\mathcal{H}_{\text{int}}\right)\middle|0\right\rangle\\
&= N\left\langle 0\middle|T\phi_{\text{in}}(x_1)\ldots\phi_{\text{in}}(x_n)\exp\left(-i\int\mathrm{d}^4x\mathcal{H}_{\text{int}}\right)\middle|0\right\rangle
\end{aligned}
\tag{6.10}
$$

Für $n=0$ ist

$$
1 = \langle 0|0\rangle = N\left\langle 0\middle|T\exp\left(-i\int\mathrm{d}^4x\mathcal{H}_{\text{int}}\right)\middle|0\right\rangle,
$$

so daß (6.10) übergeht in

$$
\longrightarrow \boxed{\tau_n(x_1,\ldots,x_n) = \frac{\langle 0|T\phi_{\text{in}}(x_1)\ldots\phi_{\text{in}}(x_n)\exp\big(-i\int\mathrm{d}^4x\mathcal{H}_{\text{int}}\big)|0\rangle}{\langle 0|T\exp\big(-i\int\mathrm{d}^4x\mathcal{H}_{\text{int}}(x)\big)|0\rangle}}
\tag{6.11}
$$

Gibt man vor, daß $\mathcal{H}_{\text{int}} = -\mathcal{L}_{\text{int}}$, also in $\mathcal{H}$ keine Ableitungsterme vorkommen, erhält man durch Ausschreiben der e-Funktion

$$
\boxed{\tau_n(x_1,\ldots,x_n) = \frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{i^k}{k!}\langle 0|T\phi_{\text{in}}(x_1)\ldots\phi_{\text{in}}(x_n)\int\mathrm{d}^4y_1\cdot\int\mathrm{d}^4y_k\mathcal{L}_{\text{int}}(y_1)\ldots\mathcal{L}_{\text{int}}(y_k)|0\rangle}{1+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{i^k}{k!}\int\mathrm{d}^4y_1\cdot\int\mathrm{d}^4y_k\langle 0|T\mathcal{L}_{\text{int}}(y_1)\ldots\mathcal{L}_{\text{int}}(y_k)|0\rangle}}
\tag{6.12}
$$

Unter Benutzung obiger Formel ist es nun möglich, die wechselwirkenden Felder in einer Störungsreihe durch die freien Felder auszudrücken.

Anhand von (6.11) kann man erkennen, daß das $\varepsilon(t)$ aus (6.3) unbedeutend ist, da es in Zähler und Nenner vorkommt und dort als Faktor $e^{\int \varepsilon(t)\mathrm{d}t}$ auftritt, der sich herauskürzt.

6.2 Wick-Theorem

In diesem Abschnitt geht es darum, das „große“ zeitgeordnete Produkt in (6.12) durch Normalordnungen, die beim Bilden des Vakuumerwartungswertes herausfallen und durch „kleinere“ Zeitordnungen auszudrücken.

Normalordnung bedeutet, daß alle Erzeuger links von den Vernichtern stehen (eingeführt auf S. 26 zu Verhinderung von Divergenzen in den Vakuumerwartungswerten).

$$:\phi(x_1)\phi(x_2): \qquad \text{Erzeuger „links“ von Vernichtern.}$$

In diesem Abschnitt werden Skalarfelder betrachtet ($\longrightarrow$ Bosonen). Da nur freie Felder auftreten, wird die verkürzte Schreibweise benutzt

$$\phi(x) := \phi_{\text{in}}(x)$$

Der Satz von Wick besagt

$$\boxed{\begin{aligned}
&T\phi(x_1)\ldots\phi(x_n) = \,:\phi(x_1)\ldots\phi(x_n):\\
&\quad +\langle 0|T\phi(x_1)\phi(x_2)|0\rangle :\phi(x_3)\ldots\phi(x_n): + \text{Permutationen}\\
&\quad +\langle 0|T\phi(x_1)\phi(x_2)|0\rangle\langle 0|\phi(x_3)\phi(x_4)|0\rangle :\phi(x_5)\ldots\phi(x_n): + \text{Perm.}\\
&\quad \vdots\\
&\begin{cases} +\langle 0|T\phi(x_1)\phi(x_2)|0\rangle\ldots\langle 0|T\phi(x_{n-1})\phi(x_n)|0\rangle + \text{Perm.} & (n \text{ gerade})\\ +\langle 0|T\phi(x_1)\phi(x_2)|0\rangle\ldots\langle 0|T\phi(x_{n-2})\phi(x_{n-1})|0\rangle\phi(x_n) + \text{P.} & (n \text{ ungerade})\end{cases}
\end{aligned}}$$

Der Beweis wird dem Leser überlassen (Standard-Spruch in diverser Literatur) Als Notation führt man folgendes ein (praktisch beim Beweisen bzw. „Benutzen“ des Wick-Theorems).

$$\underbracket{\phi(x_1)\phi(x_2)}\phi(x_3)\ldots := \text{Kontraktion } \langle 0|T\phi(x_1)\phi(x_2)|0\rangle\phi(x_3)\ldots$$

Verallgemeinerung auf beliebige Felder

$\mathcal{H}_{\text{int}}$ enthält nun Terme mit $\phi \neq \phi^+, A^\mu, \psi, \ldots$ Man erhält analog zu (6.4)

$$i\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = H_{\text{int}}(t)U(t)$$

bzw. die zu (6.5) entsprechende Gl. mit Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned}
U(t) &= U(t,t_0)U(t_0) \qquad (\mathcal{H}_{\text{int}} \to -\mathcal{L}_{\text{int}})\\
U(t,t_0) &= T\cdot\exp\left(i\iint_{t_0}^{t} \mathrm{d}^4x\mathcal{L}_{\text{int}}\right)
\end{aligned}$$

(Beachte: $\mathcal{H} \to -\mathcal{L}$, d.h., es gibt eigentlich wieder keine Ableitungskopplungen. Sollten diese doch vorhanden sein, geht man „in der Praxis“ trotzdem so vor, als hätte man keine und irgendwie stimmts dann em Ende trotzdem.)

Man setzt wieder die n-Punkt-Funktion an und erhält ein (6.11) entsprechendes Ergebnis

$$\tau_n(x_1,\ldots,x_n) = \langle 0|T\phi_1(x_1)\cdots\phi_n(x_n)|0\rangle$$
$$\sim \langle 0|T\phi_{1\,\mathrm{in}}(x_1)\cdots\phi_{n\,\mathrm{in}}(x_n)\exp\big(i\int_{t_0}^{t}\int \mathrm{d}^4x\,\mathcal{L}_{\mathrm{int}}\big)|0\rangle$$

Die Feldkomponenten ϕ_i können dabei Skalare, Vektor- oder Spinor-Komponenten sein.

Jetzt wendet man das Wick-Theorem an und erhält ein enstprechendes Ergebnis mit der Ausnahme, daß die Fermion-Komponenten wegen des Minuszeichens im zeitgeordneten Produkt einen Faktor -1 bei Vertauschungen bekommen.

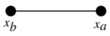
6.3 Feynman-Regeln und -Graphen

Der Ausgangspunkt des folgenden Beispiels ist die wechselwirkende Lagrange-Dichte der ϕ^3-Theorie

$$\mathcal{L}_{\mathrm{int}} = g\cdot\phi^3, \qquad \phi^+ = \phi$$

Abkürzenderweise benutzt man die Schreibweise aus (4.2)

$$\langle 0|T\phi_{\mathrm{in}}(x_a)\phi_{\mathrm{in}}(x)|0\rangle = iD(x_a - x_b)$$

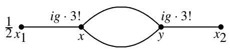


Berechnet wird nun in Ordnung g^2 die Zweipunkt-Funktion $\tau_2(x_1,x_2)$ (bzw. deren Zähler, s. (6.11) [der Nenner wird weiter unten behandelt])

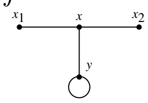
$$\tau_2(x_1,x_2) = \frac{i^2}{2}g^2\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y\langle 0|T\phi(x_1)\phi(x_2)\phi^3(x)\phi^3(y)|0\rangle,$$

aus der sich dann durch Entwickeln der e-Funktion in (6.11) die folgenden Terme und deren zugehörige Feynman-Graphen ergeben sich durch Anwendung des Wick-Theorems

$$\longrightarrow \tau_2(x_1,x_2) = \frac{1}{2}(ig3!)\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y\, iD(x-x_1)\big(iD(y-x)\big)^2 iD(x_2-y)$$

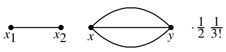


$$+\frac{1}{2}(ig3!)^2 iD(x_2-x_1)\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y\, iD(x-x_1)iD(x_2-x)$$

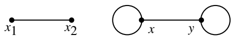


$$\cdot\, iD(y-x)iD(y-y)$$

$$+\frac{1}{2}(ig3!)\int \mathrm{d}^4\mathrm{d}^4y\big(iD(y-x)\big)^3$$



$$+\frac{1}{4}(ig3!)iD(x_2-x_1)\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y\, iD(x-x)iD(y-y)iD(y-x)$$

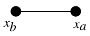


(6.13)

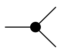
Feynman-Regeln im Ortsraum

x_1, x_2 äußere Punkte, fest

x, y innere Punkte, über die integriert wird (d.h.) $\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y$



$iD(x_a - x_b)$



$ig3!$ Vertex

Zusätzlich zum Symmetriefaktor der Vertices treten noch die Symmetriefaktoren aus dem Wick-Theorem auf, die angeben, wie oft sich derselbe Graph ergibt. Durch die letzteren Symmetriefaktoren wird dividiert, so daß man als „Gesamt-Symmetriefaktor“ den Quotienten aus dem Vertex-Symmetriefaktor dividiert durch die Anzahl der identischen Graphen.

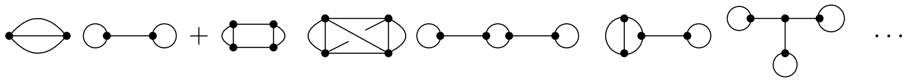
Die n-Punkt-Funktion in Ordnung g^k ist proportional der Summe der Graphen mit n äußeren Punkten und k Vertices (ohne die Vakuum-Diagramm [s.u.]).

Bedeutung des Nenners in $\tau(x_1, \ldots, x_n)$ [Gl. (6.11)]

Der Nenner in besagter Gleichung lautet (sofern man keine Ableitungskopplungen voraussetzt, also (6.12) benutzt)

$$\sum_k \frac{i^k}{k!} \int \mathrm{d}^4 y_1 \ldots \mathrm{d}^4 y_n \left\langle 0 \middle| T \mathcal{L}_{\mathrm{int}}(y_1) \ldots \mathcal{L}_{\mathrm{int}}(y_n) \middle| 0 \right\rangle = \sum \text{alle Vakuum-Diagramme}$$

(Das zeitgeordnete Produkt beschreibt die Graphen der äußeren Punkte, also die Vakuum-Graphen) Die Vakuum-Graphen sind am Beispiel der oben skizzierten ϕ^3-WW



Diese Vakuum-Diagramme treten aber auch bei der Entwicklung des Zählers auf (s. Abb. 6.1), so daß man sie letztlich „ausklammern und herauskürzen“ kann (dabei hat man darauf zu achten, daß alle denselben kombinatorischen Faktor haben). *Als Rezept kann man sich also merken, daß man die Vakuum-Diagramme bei der graphischen Entwicklung der τ-Funktion weglassen kann!*

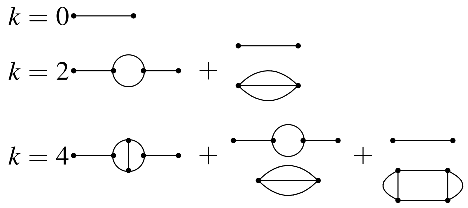


Abbildung 6.1: Auftreten der Vakuum-Diagramme im Zähler der n-Punkt-Funktion $\tau(x_1, \ldots, x_n)$ nach (6.12)

I.a. treten auch unzusammenhängende Graphen (s. Abb. 6.2, recht Spalte) auf, die aber bei der Berechnung des S-Matrix-Elementes herausfallen (in kleineren Ordnungen bzw. entsprechend wenigen ein- und ausfallenden Teilchen), da dann die unzusammenhängenden Graphen lediglich zum δ_{fi} im S-Matrix-Element beitragen.

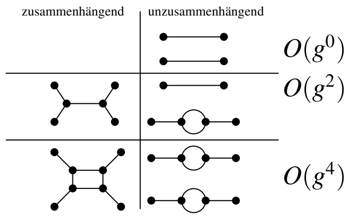


Abbildung 6.2: Die unzusammenhängenden Graphen (hier: z.B. $\tau_4; \phi^3$-WW, rechte Spalte) fallen bei der Bildung des S-Matrixelementes heraus

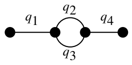
Feynman-Regeln im Impulsraum

Durch Fourier-Transformation der Propagatoren erhält man (vgl. Gl. (4.3))

$$D(x_a-x_b)=\int\frac{\mathrm{d}^4q}{(2\pi)^4}\frac{e^{-iq(x_a-x_b)}}{q^2-m^2+i\varepsilon}$$

Ab hier wird der Summand $i\varepsilon$, der im Nenner der Propagatoren zuständig ist für die Kausalität, in der Regel fortgelassen und muß bei Bedarf vom Leser beachtet werden.

Betrachtet wird (ausgehend von (6.13)) das erste Diagramm bei ϕ^3-WW.

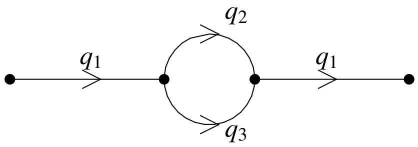
$\tau_2 \rightarrow$ 

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(ig3!)^2 i^4\int\frac{\mathrm{d}^4q_1}{(2\pi)^4}\cdots\int\frac{\mathrm{d}^4q_4}{(2\pi)^4}\frac{e^{iq_1x_1}e^{iq_4x_2}}{(q_1^2-m^2)\cdots(q_4^2-m^2)}\\
&\quad\cdot\underbrace{\int\mathrm{d}^4x\int\mathrm{d}^4y e^{-i(q_1-q_2-q_3)x}e^{-i(q_2+q_3-q_4)y}}_{=(2\pi)^8\delta^4(q_1-q_2-q_3)\delta^4(q_2+q_3-q_4)}\\
&=\int\frac{\mathrm{d}^4q_1}{(2\pi)^4}\int\frac{\mathrm{d}^4q_4}{(2\pi)^4}e^{iq_1x_1+q_4x_2}(2\pi)^4\delta^4(q_1+q_4)\\
&\quad\cdot\underbrace{\frac{i}{q_1^2-m^2}\frac{i}{q_4^2-m^2}\frac{1}{2}(ig3!)^2\int\frac{\mathrm{d}^4q_2}{(2\pi)^4}\frac{i\cdot i}{(q_2^2-m^2)\big((q_1-q_2)^2-m^2\big)}}_{\overset{(*)}{=}\tilde{\tau}_2(q_1,q_4)=\tilde{\tau}_2(q_1,-q_1)=i\Delta(q_1)}\,.
\end{aligned}\tag{6.14}$$

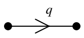
Dieses Ergebnis $(*)$ erhält man, wenn man (6.14) mit der „Konvention" vergleicht

$$\int\mathrm{d}^4x_1\int\mathrm{d}^4x_2\tau_2(x_1,x_2)e^{-i(p_{1_x}1+p_2x_2)}=(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2)\cdot\tilde{\tau}_2(p_1,p_2)\tag{6.15}$$

(mit $\tilde{\tau}_2(p_1,p_2)=i\Delta(p)$). Der zugehörige Feynman-Graph im Impulsraum hat also die Form (man beachte: Impulserhaltung an jedem Vertex)[1]



Die Feynman-Regeln im Impulsraum lauten dann im vorliegenden Fall

 $\quad\dfrac{i}{q^2-m^2+i\varepsilon}$

 $\quad ig3!$ Vertex mit Impulserhaltung!

Die Symmetrie-Faktoren ergeben sich genauso wie im Ortsraum.

Bei **geschlossenen Schleifen** wird über die freien Impulse der Schleifen (einer ist jeweils wählbar) integriert; sofern keine Schleife vorhanden ist, sind sowieso alle Impulse durch Impulserhaltung festgelegt.

n-Punkt-Funktion in Ordnung g^k

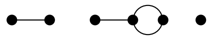
Man verbinde n äußere Impulse, die üblicherweise mit $q_1,\ldots,q_n$ bezeichnet werden, durch k Vertices. Dann erstelle man sich alle Feynman-Diagramme und erhält somit alle analytischen Ausdrücke, über die noch summiert wird.

[1] beachte ebenfalls: in (6.15) bleibt letztlich die Gesamtimpulserhaltung übrig!

Selbstenergie und Z-Faktor

Der Gesamt-Propagator setzt sich zusammen aus dem freien Propagator und den wechselwirkenden höherer Ordnung

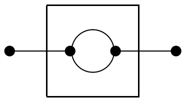
$$\Delta(q) = \Delta^{(0)} + \Delta^{(2)}$$

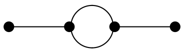


$$= \frac{1}{q^2 - m^2}\left(1 - \frac{\Sigma(q^2)}{q^2 - m^2}\right).$$

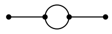
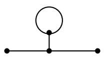
Dabei bezeichnet das Σ den „inneren Teil“ des Graphen, so daß sich der jeweilige „Gesamt-Graph“ aus zwei freien Propagatoren und dem Σ zusammensetzt (in Ordnung g^2)

Σ

$\Sigma(q^2) =$ 

$\longrightarrow$  $= \frac{i}{q_1^2 - m^2}(i\Sigma)\frac{i}{q_1^2 - m^2}$

Das „Gesamt-Σ“ ergibt sich aus der Summe der einzelnen, d.h. z.B. in 1. Ordnung g^2, man betrachtet alle Graphen mit zwei inneren Vertices und schneidet (s.o) die beiden äußeren Propagatoren ab und erhält so die Σ_i. Die Summe über i liefert dann die Selbstenergie

 +  $\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2$ *Selbstenergie* $\Sigma(q^2)$

$i\Sigma_1$ $\quad$ $i\Sigma_2$

Anmerkung:

- Σ' sei die Ableitung von Σ. Dann erhält man für $'q^2 = m^{2'}$

$$'\lim_{q^2 \to m^2}' : \quad \frac{1 - \Sigma'(m^2)}{q^2 - m^2} \quad (+\text{reguläre Terme})$$
$$= \frac{Z}{q^2 - m^2} = \frac{1}{q^2 - m^2} + Ag^2 + O(g^4) \tag{6.16}$$

  wobei Z das Residuum des Pols ist (nach Källen-Lehmann). Somit erhält man den Z-Faktor (der sich im LSZ-Theorem ergibt) aus

$$\longrightarrow \boxed{Z = 1 - \Sigma'(m^2)}$$

- Σ ist (logarithmisch) divergent, Tadpoles sind sogar quadratisch divergent (s. Abb. 6.3) Derartige

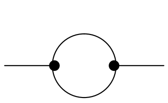
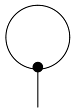
 $\sim \int \frac{d^4q}{q^4}$  $\sim \int \frac{d^4q}{q^2}$ UV-Divergenz

Abbildung 6.3: Divergenz-Verhalten der Selbstenergie und von Tadpoles

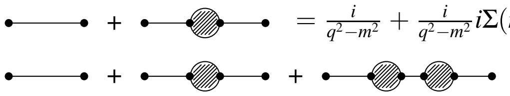
Divergenzen sind ein generelles Problem in der Quantenfeldtheorie, welches man z.B. Lösen könnte durch „Aufweichen“ der Operatoren ϕ, welche dann aber nicht mehr lokal und somit nicht mehr handhabbar wären.

In der Praxis führt man die sog. *Renormierung* durch, man *regularisiert* die Divergenzen, d.h. man untersucht die Struktur der Divergenzen, um sie dann anschließend durch Einführung von Counter-Termen zu absorbieren (*Renormierung*). Es gibt mehrere Möglichkeiten, die Regularisierung durchzuführen (dazu mehr im zweiten Teil), hier wird kurz die anschaulichste vorgestellt.

Die divergenten Integrale divergieren nur für große Impulse, so daß man „einfach“ die Impulse abschneidet (Einführung eines Cut-Off-Parameters), um sie konvergent zu machen. Dadurch handelt man sich natürlich eine Abhängigkeit vom Cut-Off (hier Λ) ein.

$$\Sigma(q^2) = \underbrace{\Sigma(m^2)}_{\text{divergent (}\Lambda\text{-abhängig)}} + (q^2 - m^2)\underbrace{\Sigma'(m^2)}_{\substack{\text{i.a. divergent}\\ \text{hier konvergent}}} + \text{konv. Terme}$$

Um der Bedeutung des Σs auf die Spur zu kommen, summiert man alle Diagramme bis zur vorgegebenen Ordnung (hier 2) auf (s. Abb. 6.4 oben). Bei höheren Ordnungen entwickelt man dies in eine geometrische Reihe (s. Abb. 6.4 unten). Man kann erkennen, daß die Selbstenergie im Nenner einen



$$= \frac{i}{q^2-m^2} + \frac{i}{q^2-m^2} i\Sigma(m^2) \frac{i}{q^2-m^2}$$

$$\overset{\text{geom. Reihe}}{=} \frac{i}{q^2-m^2+\Sigma(m^2}$$

Abbildung 6.4: Um der Bedeutung der Selbstenergie näher zu kommen, muß man wie in der Abbildung unten die Diagramme jeder Ordnung aufsummieren

Beitrag zum Residuum des Propagators liefert und desweiteren den Pol des Propagators verschieben kann (was nach Källen-Lehmann die physikalische Masse ändert und somit unphysikalisch ist).

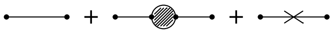
Um diesen Mißstand zu korrigieren, ändert man die gegeben Lagrange-Dichte so, daß letzlich die divergenten Terme herausfallen. Man führt die sog. „nackte Masse“ $m_0^2 = m^2 + \delta m^2$ ein und erhält somit folgende korrigierte Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} \to \mathcal{L} - \frac{\delta m^2}{2}\phi^2 = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{(m^2 - \delta m^2)}{2}\phi^2,$$

wodurch sich ein zusätzlicher Vertex ergibt

 Counter-Term $\qquad -2 \cdot i\frac{\delta m^2}{2} = -i\delta m^2$

(Der Faktor 2 tritt als Vertex-Symmetrie-Faktor auf, da das Feld neutral ist). Somit erhält man, wenn man den Counter-Term zum Propagtor addiert



$$\frac{i}{q^2 - m^2} i\big(\Sigma(m^2) - \delta m^2\big)\frac{i}{q^2 - m^2}$$

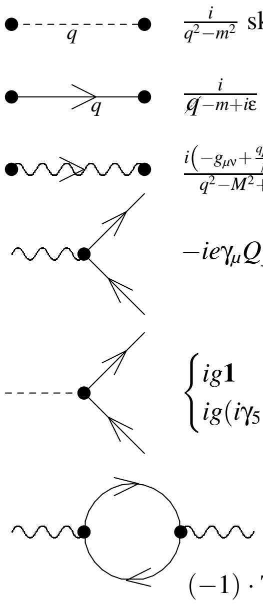
Setzt man nun $\delta m^2 := \Sigma(m^2)$ (=Selbstenergie auf Massenschale), erhält man (wenn man wieder über alle Ordnungen summiert (geom. Reihe)) für den Propagator $i/(q^2 - m^2 + \ldots)$ wieder einen Pol bei der physikalischen Masse m^2.

Dieses Verfahren, die Einführung von Counter-Termen zur Absorption von unphysikalischen Termen, bezeichnet man im vorliegenden Fall als Massen-Renormierung.

Dabei ist zu beachten, daß man nun (in höheren Ordnungen, wo die Divergenzen erst auftreten) eben nicht mehr die physikalische Masse in $\mathcal{L}$ stehen hat, sondern die nackte Masse m_0.

Bei den Kopplungen geht man analog vor (Einführung einer nackten Ladung) $g_i \to g_i + \delta g_i = g_i^0$).

Sofern diese sog. „Parameter-Normierung“ in allen Ordnungen zu endlichen S-Matrix-Elementen führt, spricht man von einer *renormierbaren Theorie*. Nicht renormierbar ist z.B. $\mathcal{L}_{\text{int}} \sim \phi^6$, da man dabei beliebig viele Counter-Terme zur Absorption benötigte (später).



$\frac{i}{q^2-m^2}$ skalarer Propagator

$\frac{i}{\not{q}-m+i\varepsilon}$ Fermion-Propagator

$\frac{i\left(-g_{\mu\nu}+\frac{q_\mu q_\nu}{M^2}\right)}{q^2-M^2+i\varepsilon}$ Vektor-Propagator (massiv)

$-ie\gamma_\mu Q_f$ QED-Vertex

$\begin{cases} ig\mathbf{1} & \text{bei } \mathcal{L}_{\text{int}} = g\overline{\psi}\psi\phi \\ ig(i\gamma_5) & \text{bei } \mathcal{L}_{\text{int}} = g\overline{\psi}i\gamma_5\psi\phi \end{cases}$ Yukawa-Vertex

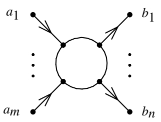
$(-1)\cdot \mathrm{Tr}\big\{(\text{Fermion-Loop})\big\}$

Abbildung 6.5: Bei geschlossenen Fermion-Schleifen kommt noch ein Faktor -1 hinzu (und die Spur über die Loop-Matrizen)

Feynman-Regeln für allgemeine Felder und Wechselwirkungen

s. Abb. 6.5

Feynman-Regeln für *S*-Matrix-Elemente (Amplituden)



$$S_{fi} = (2\pi)^4\delta^4\Big(\sum_p\Big)T_{fi}$$

Durch Anwendung des LSZ-Theorems erhält man daraus letztlich

$$S_{fi} = \left(\sqrt{Z}\right)^{n+m}\cdot \text{Wellenfunktionen}\cdot \tau^{\text{amp},c}_{n+m}\Big|_{\text{on-shell}}$$

(es ergibt sich ein $\sqrt{Z}$-Faktor pro Feld.) Nun muß man die τ-Funktion bis zur k-ten Ordnung entwickeln. Z ergibt sich dann als

$$\begin{aligned} Z &= 1 + z_1 g^2 + z_2 g^4 + z_3 g^8 + \cdots \qquad \text{bis } g^k \\ \longrightarrow \sqrt{Z} &= 1 + \frac{z_1}{2}g^2 + \frac{z_2}{4}g^4 - \frac{1}{8}z_1^2 g^4 + \cdots \end{aligned}$$

Beim S-Matrix-Element werden die Terme mit $g^l, l > k$ weggelassen (da in nächster Ordnung).

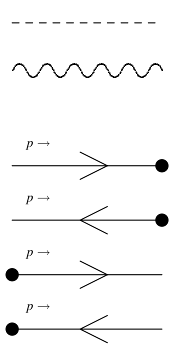
Die Bornsche Näherung beschreibt die niedrigste Ordnung (ohne Auftreten von Schleifen, die sog. *Born-Graphen* oder *Tree-Graphen*). Für Born-Ordnung gilt per def.

Bornsche Näherung: $\boxed{Z = 1}$.

Regeln

- Zeichne externe Lininen für gegebene Konfiguration von ein- und auslaufenden Teilchen (Impulsen).
- Verbinde Linien mittels Vertices und Propagatoren (in gegebener Ordnung).
- Die analytischen Ausdrücke ergeben sich gemäß der Impulsraum-Regeln (inkl. 4-Impulserhaltung).
- Multipliziere mit $\sqrt{Z}$ für jede äußere Linie und entwickle bis zur Ordnung g^k
- $\sum$ alle Diagramme $=\ iT_{fi}$.
- In den äußeren Linien gibt es keine Selbstenergie[2]

Feynman-Regeln für Wellenfunktionen (äußere Linien) (s. Abb. 6.6)



$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}$	Skalar (ein- und auslaufend)
$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \cdot \varepsilon_\mu(\lambda)$	einlaufendes Vektor-Teilchen
$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \cdot \varepsilon_\mu(\lambda)$	auslaufendes Vektor-Teilchen
$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \cdot u(p)$	einlaufendes Dirac-Teilchen
$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \cdot \overline{v}(p)$	einlaufendes Anti-Teilchen
$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \cdot \overline{u}(p)$	auslaufendes Teilchen
$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \cdot v(p)$	auslaufendes Anti-Teilchen

Abbildung 6.6: Feynman-Regeln für Wellenfunktionen

Beispiel

Betracht wird der Prozeß $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ bei Yukawa-Potential (Graph: Abb. 6.7, bei der **1** beim Vertex stünde ein $\delta_{\alpha\beta}$, wenn u_α bzw. $\overline{v}_\beta$ Spinor-Indizes hätte)

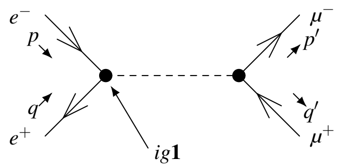


Abbildung 6.7: $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ bei Yukawa-Potential

Als Regel zur Berechnung der analytischen Ausdrücke beachte man, daß man gegen die Pfeilrichtung vorgeht (Man läuft immer entlang Fermion-Linien entgegen der Pfeilrichtung).

$$\longrightarrow \big(\underbrace{\overline{v}(q)}_{\text{Zeile}}(ig)\underbrace{u(p)}_{\text{Spalte}}\big)\frac{i}{(p+q)^2-M^2}\big(\overline{u}(p')(ig)v(q')\big)\left(\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\right)^4$$

Beim Vertauschen von Fermion-Linien hat man darauf zu achten, daß man die Graphen subtrahiert statt addiert (s. Abb. 6.8).

[2] das liegt daran, daß im LSZ-Theorem die vollständigen äußeren Propagatoren amputiert werden und durch die Wellenfunktionen ersetzt werden.

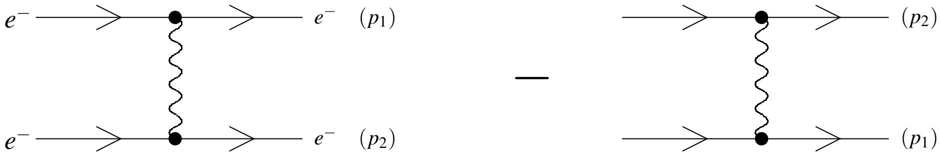


Abbildung 6.8: Bei Vertauschung von Fermion-Linien müssen die Graphen subtrahiert werden!

Ergänzung: WW mit Ableitungskopplungen

Die WW-Lagrange-Dichte $\mathcal{L}_{\text{int}}$ enthalte Ableitungen ∂_μ, z.B.

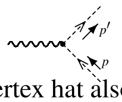
$$\mathcal{L}_{\text{int}} = ie\big(\phi^+\partial_\mu\phi - (\partial_\mu\phi^+)\phi\big)A^\mu.$$

Der Zeitentwicklungs-Operator ergibt sich trotzdem als

$$U \sim \exp\big(i\int \mathrm{d}^4x\mathcal{L}_{\text{int}}\big).$$

Dabei ist es so, daß aus $\mathcal{H}_{\text{int}}$ *immer* $\mathcal{L}_{\text{int}}$ wird, d.h. die Feynman-Graphen ergeben sich *immer* aus $\mathcal{L}$ (was auch gut ist, da nur die Lagrange-Dichte lorentzinvariant ist).

Durch die Fourier-Transformation werden allgemein aus den Ableitungen Impulse ($\partial_\mu \to ip_\mu$), so daß sich folgender Vertex ergibt (Pfeile in Richtung des Ladungsflusses)



$$= i(ie)(-ip_\mu - ip'_\mu) = ie(p+p')_\mu$$

Der Vertex hat also eine Impulsabhängigkeit.

Kapitel 7

Quantenelektrodynamik (QED)

7.1 Lagrange-Dichte und Feynman-Regeln

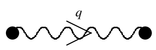
Die QED im urpsrünglichen Sinne besteht aus Photonen ($A^\mu(x)$), und Elektronen/Positronen (e^+/e^-, $\psi(x), \overline{\psi}(x)$). Die Lagrange-Dichte lautet

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \underbrace{\mathcal{L}_{\text{fix}}(A_\mu)}_{\text{s. Kap. 4.2}} + \overline{\psi}\big(i\not{\partial} - m\big)\psi + \underbrace{e\overline{\psi}\gamma_\mu \psi A^\mu}_{=\mathcal{L}_{\text{int}}} \tag{7.1}$$

Der Eichfixierungsterm lautet z.B. in der kovarianten Eichung

$$\mathcal{L}_{\text{fix}} = \frac{-1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2$$

und dient, wie bereits beschrieben dazu, die Eichinvarianz der Lagrange-Dichte zu zerstören, da ansonsten der Photon-Propagator nicht existieren würde und die Polarisationssumme nicht kovariant wäre.
Der Photon-Propagator ist



$$\frac{i}{q^2 + i\varepsilon}\left(-g_{\mu\nu} + (1-\xi)\frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right)$$

Der hintere Summand in der Klammer trägt wegen der Stromerhaltung nicht zum Matrixelement bei, so daß man in der Praxis $\xi = 1$ setzt (Feynman-Eichung). Die Feynman-Regeln sind ansonsten bekannt und müssen einfach angewendet werden. Man hat zu beachten, daß man über die verschiedenen Polarisationszustände der Photonen $\big(\varepsilon_\mu(\lambda)$ mit $\lambda = 1, 2\ (\pm)\big)$ summieren muß. Jedoch wird die Polarisationssumme in der Praxis relativ einfach (wieder wegen Stromerhaltung)

$$\sum_{\lambda=1,2\ (\pm 1)} \varepsilon_\mu(\lambda)\varepsilon^*_\mu(\lambda) = -g_{\mu\nu}$$

Der Rest trägt wegen der Stromerhaltung nicht bei.

Zur weiteren Vereinfachung sollte man das *Furry-Theorem* beachten (s. Abb. 7.1)

Das ist wichtig bei sog. *Tadpoles*, welche aus einem Loop mit einer Photonlinie bestehen und eben nach Furry nicht berechnet werden brauchen.

Die QED im weiteren Sinne behandelt die WW zwischen Photonen mit allen geladenen fundamentalen Fermionen (Leptonen: $e^\pm, \mu^\pm, \tau^\pm$ mit Ladung $Q = \pm 1$ und den Quarks $q, \overline{q}$ mit Ladung $+2/3$ für das u, c, t bzw. $-1/3$ für d, s, b). Die dahingehend erweiterte Lagrange-Dichte hat folgende Form

$$\mathcal{L}_{\text{e.m.}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \mathcal{L}_{\text{fix}}(A_\mu) + \sum_{f=\text{lept},q} \big\{\overline{\psi}_f(i\not{\partial} - m_f)\psi_f - eQ_f\overline{\psi}_f\gamma_\mu\psi_f A^\mu\big\},$$

wobei $\sum\limits_q = 3 \cdot \sum\limits_{u,\dots,t}$ (wobei die 3 die *Color* der Quarks ist, die erst bei der Quantenchromodynamik tiefere Bedeutung erlangt; es genügt zu wissen, daß es im Prinzip jedes Quark dreimal gibt).

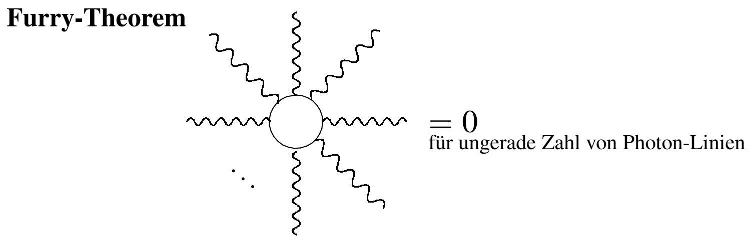


Abbildung 7.1: Das Furry-Theorem besagt, daß Loops mit ungerader Anzahl von Photonlinien verschwinden.

7.2 QED-Prozesse in niedrigster Ordnung

7.2.1 Beispiele (2 → Teilchen) s. Abb. 7.2

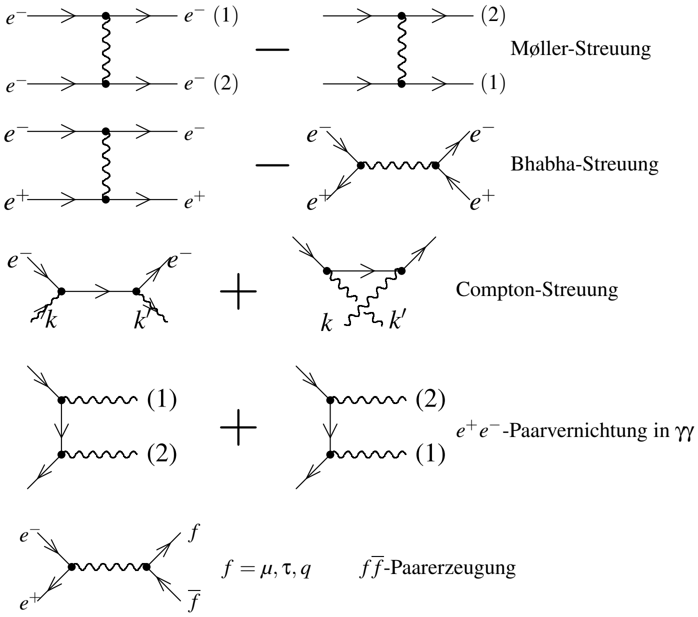


Abbildung 7.2: Beispiele zur QED in niedrigster Ordnung 2 → 2 Teilchen

Bei Mehrteilchenprozessen wirken entsprechend mehr Teilchen mit. Bremsstrahlungsprozesse (zusätzliches äußeres Photon) und Prozesse mit äußerem (klassischen) Feld sind in Abb. 7.3 aufgeführt.

7.2.2 Compton-Streuung

$$\gamma(k) + e^-(p) \longrightarrow \gamma(k') + e^-(p') \qquad \text{Abb. 7.4.}$$

Die Polarisationsvektoren der γs werden wie folgt gekennzeichnet

$$\varepsilon^\mu(k) \equiv \varepsilon^\mu, \qquad \varepsilon^\mu(k') \equiv \varepsilon'^\mu$$

sie sind transversal und raumartig ($\varepsilon \cdot k = \varepsilon' \cdot k' = 0$).

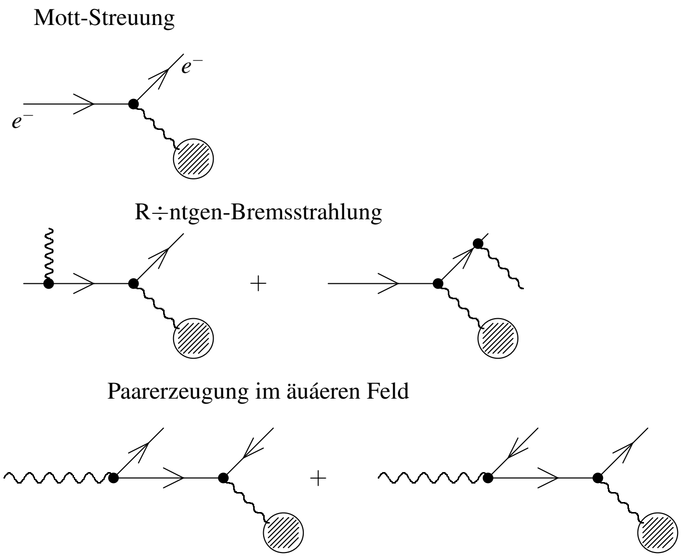


Abbildung 7.3: Prozesse mit äußerem (klassischen) Feld, Bremsstrahlung

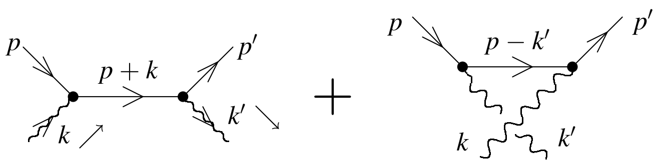


Abbildung 7.4: Compton-Streuung

1. **Matrixelement**

$$iT = \sum \text{(Diagramme)} = \frac{1}{(2\pi)^6}\mathcal{M}$$
$$\mathcal{M} = -ie^2\big(\overline{u}(p')\not\varepsilon'\frac{\not p + \not k + m}{2p\cdot k}\not\varepsilon u(p) + \overline{u}(p')\not\varepsilon\frac{\not p - \not k' + m}{-2p\cdot k}\not\varepsilon' u(p)\big)$$

(dabei $(p+k)^2 - m^2 = p^2 + 2kp + k^2 - m^2 = 2p\cdot k$). Nun geht man ins Laborsystem (Elektron ruht am Anfang)

$$\begin{aligned}&(p^\mu) = (\vec{m},0) \quad (\varepsilon^\mu) = (0,\vec{\varepsilon}) \quad (\varepsilon'^\mu) = (0,\vec{\varepsilon}') \quad \vec{\varepsilon}^2 = \left(\vec{\varepsilon}'\right)^2 = 1\\ &\longrightarrow p\cdot\varepsilon = p\cdot\varepsilon' = 0 \longrightarrow \not p\not\varepsilon = -\not\varepsilon\not p, \quad \not p\not\varepsilon' = -\not\varepsilon'\not p\\ &(\not p - m)u(p) = 0 \qquad \longrightarrow \not p u(p) = mu(p)\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$\longrightarrow \mathcal{M} = ie^2\overline{u}_{s'}(p')\underbrace{\left(\frac{\not\varepsilon\not\varepsilon'\not k}{2pk} + \frac{\not\varepsilon\not\varepsilon'\not k'}{2pk'}\right)}_{=:\Gamma}u_s(p) = \mathcal{M}(s',s)$$

2. **Übergangswahrscheinlichkeit**

$$|\mathcal{M}|^2 = e^4\overline{u}_{s'}(p')\Gamma u_s(p)\cdot\overline{u}_s(p)\overline{\Gamma}u_{s'}(p') = e^4\mathrm{Tr}\big\{u_{s'}(p')\overline{u}_{s'}(p')\Gamma u_s(p)\overline{u}_s(p)\overline{\Gamma}\big\}$$

Um die komplette Übergangswahrscheinlichkeit zu erhalten, müssen alle möglichen „Prozesse“ in Betracht gezogen werden, daher wird über die einlaufenden Teilchen (Helizität s') gemittelt und über die auslaufenden (ungestrichen) summiert

$$|\mathcal{M}|^2 \to \frac{1}{2}\sum_{s,s'}|\mathcal{M}(s',s)|^2 \equiv \overline{|\mathcal{M}|^2}.$$

mit

$$\begin{aligned}\overline{|\mathcal{M}|^2} &= \frac{1}{2}e^4\mathrm{Tr}\big\{(\not p' + m)\Gamma(\not p + m)\overline{\Gamma}\big\} = \dots\\ &= \frac{e^4}{2}(T_1 + T_2 + 2\Re T_3),\end{aligned} \tag{7.2}$$

mit den Abkürzungen

$$T_1 = \frac{1}{(2pk)^2}\mathrm{Tr}\big\{(\not p' + m)\not\varepsilon\not\varepsilon'\not k(\not p + m)\not k\not\varepsilon\not\varepsilon'\big\} \tag{7.3}$$
$$T_2 = \frac{1}{(2pk')^2}\mathrm{Tr}\big\{(\not p' + m)\not\varepsilon\not\varepsilon'\not k'(\not p + m)\not k'\not\varepsilon\not\varepsilon'\big\} \tag{7.4}$$
$$T_3 = \frac{1}{(2pk)(2pk')}\mathrm{Tr}\big\{(\not p' + m)\not\varepsilon\not\varepsilon'\not k'(\not p + m)\not k\not\varepsilon\not\varepsilon'\big\} \tag{7.5}$$

3. **Berechnung der Spuren**

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tr}\big\{\phi_1\dots\phi_n\big\} = \mathrm{Tr}\big\{\phi_n\phi_1\dots\phi_{n-1}\big\}\\ &\not a^2 = a^2, \quad \not k^2 = 0, \quad \not\varepsilon^2 = \not\varepsilon'^2 = -1\\ &\mathrm{Tr}\big\{\not a\not b\not c\not d\big\} = 4\big((ab)(cd) + (ad)(bc) - (ac)(bd)\big)\end{aligned}$$

Benutzt man diese Formeln, erhält man für (7.3)-(7.5)

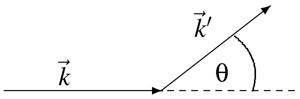
$$
\begin{aligned}
T_1 &= 8(kp)\big((k'p) + 2(k\varepsilon')^2\big)\frac{1}{2pk)^2} \\
T_2 &= 8(k'p)\big((kp) - 2(k'\varepsilon)^2\big)\frac{1}{(2pk')^2} \\
T_3 &= \left(8(kp)(k'p)\big(2(\varepsilon\cdot\varepsilon')^2 - 1\big) - 8(k'p)(k\varepsilon')^2 + 8(kp)(k'\varepsilon)^2\right)\frac{1}{(2kp)(2k'p)}
\end{aligned}
$$

Setzt man dies wiederum in (7.2) ein, ergibt sich

$$
\begin{aligned}
\overline{|\mathcal{M}|^2} &= e^4\left(\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} + 4(\vec{\varepsilon}\cdot\vec{\varepsilon}')^2 - 2\right) \\
& k^0 = \omega, \quad k'^0 = \omega', \quad k'p = m\omega', \quad kp = m\omega
\end{aligned}
$$

4. **Wirkungsquerschnitt** (im Laborsystem)

$$
p = (m, \vec{0}), \quad p' = (p'0, \vec{p}'), \quad k = (\omega, 0, 0, \omega), \quad k' = (\omega', \vec{k}')
$$



$$
k\cdot k' = \omega\omega' - \vec{k}\cdot\vec{k}' = \omega\omega'(1-\cos\theta)
$$

Der Wirkungsquerschnitt ergibt sich gemäß (5.4)

$$
\mathrm{d}\sigma = \frac{(2\pi)^{10}}{4(p\cdot k)}\cdot\underbrace{\frac{1}{(2\pi)^{12}}\overline{|\mathcal{M}|^2}}_{=|T|^2}\delta^4(p+k-p'-k')\underbrace{\frac{\mathrm{d}^3p'}{2p'^0}}_{\mathrm{d}^4p'\delta(p'^2-m^2)\Theta(p'^0)}\underbrace{\frac{\mathrm{d}^3k'}{2k'^0}}_{\frac{1}{2}\omega'\mathrm{d}\omega'\mathrm{d}\Omega'}
$$

$$
\longrightarrow \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega'} = \frac{(2\pi)^{-2}}{16m^2}\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2\overline{|\mathcal{M}|^2}, \qquad \omega' = \frac{m\omega}{m+\omega(1-\cos\theta)}
$$

Setzt man nun alles ein, erhält man letztlich

$$
\longrightarrow \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega'} = \tfrac{\alpha^2}{4m^2}\left(\tfrac{\omega'}{\omega}\right)^2\left(\tfrac{\omega'}{\omega} + \tfrac{\omega}{\omega'} + 4(\vec{\varepsilon}\cdot\vec{\varepsilon}')^2 - 2\right)
$$

(Klein-Nishina, 1929). Für $\omega \ll m \longrightarrow \omega' \approx \omega$ wird der Wirkungsquerschnitt unabhängig von ω und ω'

$$
\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} \approx \frac{\alpha^2}{m^2}(\vec{\varepsilon}\cdot\vec{\varepsilon}')^2 \quad \text{Thomson-WQ.}
$$

und man erhält den klassischen Thomson-WQ (e ist dabei die physikalische Ladung).

5. **Summation über alle Polarisationen** Wie bei den Spins muß über die Polarisationen gemittelt bzw. summiert werden. Die Polarisationen seien wie folgt gegeben

$$
\begin{aligned}
&\vec{\varepsilon}_1 = (1,0,0), \quad \vec{\varepsilon}'_1 = (-\cos\theta\cos\varphi, -\cos\theta\sin\varphi, \sin\theta) \\
&\vec{\varepsilon}_2 = (0,1,0), \quad \vec{\varepsilon}'_2 = (\sin\varphi, -\cos\varphi, 0) \\
&\vec{\varepsilon}'_{1,2}\cdot\vec{k}' = 0, \qquad k' = \omega(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta).
\end{aligned}
$$

Der Wirkunsgquerschnitt wird

$$
\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega'} \to \frac{1}{2}\sum_{i,j=1,2}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}_{i,j}
$$

Mit $\frac{1}{2}\sum(\vec{\varepsilon}_j \cdot \vec{\varepsilon}_i)^2 = \frac{1}{2}(\cos^2\theta + 1)$ erhält man den Wirkungsquerschnitt für unpolarisierte Photonen als

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{unpol.}} = \frac{\alpha^2}{2m^2}\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2\left(\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - \sin^2 2\theta\right)$$
$$\xrightarrow{m\ll\omega} \frac{\alpha^2}{2m^2}(2 - \sin^2\theta) \quad \text{Thomson.}$$

Der Gesamt-Wirkungsquerschnitt ergibt sich aus dem differentiellen durch Winkelintegration

$$\sigma = \int d\Omega \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{unpol.}}$$
$$\sigma_{\text{Compton}} \xrightarrow{\omega\ll m} \sigma_{\text{Thomson}} = \frac{8\pi}{3}\frac{\alpha^2}{m^2}$$

Anmerkungen

- Der Thomson-Limes $\sigma_{\text{Compton}} \longrightarrow \sigma_{\text{Thomson}}$ ist der „klassische Limes“. Man kann sehen, daß die Feinstrukturkonstante klassisch bestimmbar ist.
- Der Thomson-Limes bleibt auch in höherer Ordnung gültig. Der experimentelle Wert von α ist unabhängig von der Ordnung der Störungsrechnung[1] (allerdings nur in der QED, die als einzige Quantenfeldtheorie einen meßbaren klassischen Limes hat).

7.3 Anomales magnetisches Moment

Aus der Dirac-Gleichung folgt $g = 2$, während in der QED ein größerer Wert berechnet wird.

Als formales Hilfsmittel wird die *Gordon-Zerlegung* benötigt:

Seien ψ_1, ψ_2 Lösungen der Dirac-Gleichung $(i\not{\partial} - m)\psi = 0$, also freie Dirac-Felder, dann gilt

$$\boxed{\overline{\psi}_2\gamma_\mu\psi_1 = \frac{1}{2m}\left(\overline{\psi}_2 i\partial_\mu\psi_1 - (i\partial_\mu\overline{\psi}_2)\psi_1 + \partial^\nu(\overline{\psi}_2\sigma_{\mu\nu}\psi_1)\right)} \tag{7.6}$$

mit $\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$. Für $\psi_1 = u(p)e^{-ipx}$ und $\psi_1 = u(p')e^{-ip'x}$ folgt daraus die Gordon-Zerlegung im Impulsraum

$$\boxed{\overline{u}(p')\gamma_\mu u(p) = \overline{u}(p')\left(\frac{(p+p')_\mu}{2m} + \frac{i}{2m}\sigma_{\mu\nu}(p'-p)^0\right)u(p)} \tag{7.7}$$

1. äußeres Magnetfeld $A^\mu = \left(0, \vec{A}(\vec{x})\right)$ In der folgenden Gleichung wird die Gordon-Zerlegung angewandt, was ein bißchen zweifelhaft ist, da sie eigentlich nur für freie Felder definiert ist. Insofern hat man es hier im Prinzip mit freien Feldern zu tun, d.h., das $\mathcal{L}_{\text{int}}$ entspricht *nicht* dem üblichen!

$$\longrightarrow \mathcal{L}_{\text{int}} \overset{(7.6)}{=} e\overline{\psi}\gamma_\mu\psi A^\mu = \underbrace{\frac{e}{2m}\left(\overline{\psi}i\partial_\mu\psi - (i\partial_\mu\overline{\psi})\psi\right)A^\mu}_{=\vec{p}\cdot\vec{A}\text{ -Term, Bahn-}\vec{B}\text{-WW}} + \underbrace{\frac{e}{2m}\partial^\nu\left(\overline{\psi}\sigma_{\mu\nu}\psi\right)A^\mu}_{\text{Spin-WW}}$$

Durch „partielle Integration“ des Spin-Terms (Integration, obwohl kein Integral vorhanden ist; gemeint ist das Wirkungs-Integral $S = \int d^4x\mathcal{L}$) erhält man

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{int}}^{\text{Spin}} &= -\frac{e}{2m}\overline{\psi}\sigma_{\mu\nu}\psi\left(\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu\right)\frac{1}{2} \\
&= \frac{e}{4m}\overline{\psi}\sigma_{\mu\nu}\psi \cdot F^{\mu\nu} \qquad F \text{ nur für Magnetfelder} \\
&= \frac{e}{4m}\overline{\psi}\sigma_{kl}\psi F^{kl} = -\frac{e}{4m}\cdot 2\overline{\psi}\vec{\Sigma}\cdot\vec{B}\psi \\
&= -\boxed{2}\frac{e}{2m}\overline{\psi}\vec{S}\cdot\vec{B}\psi \overset{!}{=} -\mathcal{H}_{\text{int}} \qquad \longrightarrow \boxed{g = 2}.
\end{aligned}$$

[1] das besagt das Theorem von Jauch und Rohrlich

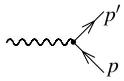
$$\longrightarrow \boxed{H_{\text{int}}^{\text{Spin}} = \int \mathrm{d}^3x\, \overline{\psi}(x) \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \longrightarrow\, g=2}}{2} \cdot \frac{e}{2m} \psi(x)}$$

In dieser Wechselwirkung erhält man also einen Wert $g = 2$ wie bei Dirac.

2. Vertex für Wechselwirkung mit A-Feld

$$\mathcal{L}_{\text{int}}^{\text{Spin}} = \frac{e}{2m}\Big(\underbrace{(\partial^\nu \psi)}_{=ip'^\nu}\sigma_{\mu\nu}\psi + \overline{\psi}\sigma_{\mu\nu}\underbrace{(\partial^\nu \psi)}_{=-ip^\nu}\Big)A^\mu$$

Für ψ ist dabei eine ebene Welle einzusetzen (da „freies“ Feld).



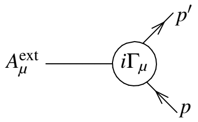
$$i\frac{e}{2m}\big(ip'^\nu - ip^\nu\big)\sigma_{\mu\nu} = \frac{e}{2m}(p-p')^\nu \underbrace{\sigma_{\mu\nu}}_{=2S_{\mu\nu}} = 2\frac{e}{2m}(p-p')^\nu S_{\mu\nu} \tag{7.8}$$

3. Der Vertexfaktor, der sich „für“ das magnetische Moment ergibt, hat die Form (7.8), so daß man die Abweichungen des magnetisches Moment kann als Zusatzterm von eben dieser Form in das bisherige $\mathcal{L}_{\text{int}}$ schreiben kann

$$\mathcal{L}_{\text{int}} \to \mathcal{L}_{\text{int}} + \underbrace{a \cdot \frac{e}{4m}\overline{\psi}\sigma_{\mu\nu}\psi F^{\mu\nu}}_{\longrightarrow\ \text{Vertex}\ \frac{e}{2m}(1+a)(p-p')^\nu\sigma_{\mu\nu}} \tag{7.9}$$

$$\longrightarrow \boxed{a = \frac{g-2}{2}} \qquad g = 2(1+a) \tag{7.10}$$

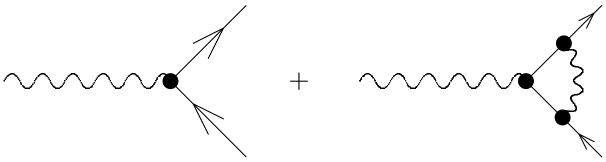
4. Störungstheoretische Betrachtung



$$= \overline{u}(p')i\Gamma_\mu u(p) \cdot \tilde{A}^\mu_{\text{ext(p}',\text{p)}}$$

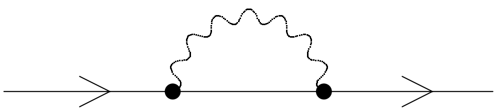
bis 1-Schleifenordnung: $q^2 := (p-p')^2$

$i\Gamma_\mu =$



$$ie\gamma_\mu \quad + \quad ie\Lambda_\mu(e^2)$$

$Z = 1 + \delta Z(e^2)$



$$\frac{\delta Z}{\not p - m} + \cdots$$

Bis Ordnung e^3: ($\tilde{A}^\mu$ weglassen)

$$ie\overline{u}(p')\big((1+\delta Z)\gamma_\mu + \Lambda_\mu\big)u(p)$$

$$\Lambda_\mu = \gamma_\mu F_1(q^2) + \frac{(p+p')_\mu}{2m}F_2(q^2) \qquad \text{Kovarianten-Zerlegung.}$$

(Andere Vektoren kann man auf die beiden obigen zurückführen, γ_5-Terme sind wegen Paritätsverletzung nicht erlaubt). F_1, F_2 sind skalare Faktoren, die sog. *Formfaktoren*.

$$\longrightarrow ie\overline{u}(p')\Big(\big(1+\delta Z+F_1(q^2)\big)\gamma_\mu+\frac{1}{2m}(p+p')_\mu F_2(q^2)\Big)u(p)$$

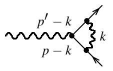
Jetzt Gordon-Zerlegung (für p, p') (7.7) benutzen

$$= ie\overline{u}(p')\Big(\big(1+\delta Z+\underbrace{F_1(q^2)+F_2(q^2)}_{=:F_v(q^2)}\big)\gamma_\mu-\frac{i}{2m}(p'-p)^\nu\sigma_{\mu\nu}F_2(q^2)\Big)u(p)$$

$$= u(p')\Big(ie\gamma_\mu\big(1+\underbrace{\delta Z+F_v(0)}_{\overset{q^2\to 0}{=}0 \text{ (Ward-Id.)}^2}\big)-\frac{e}{2m}(p-p')^\nu\sigma_{\mu\nu}F_2(0)\Big)u(p)+O(q^2)$$

$$\overset{(7.10)}{\longrightarrow}\ \boxed{a=-F_2(0)}.$$

5. Berechnung des 1-Schleifen-Integrals für $F_2(0)$ (ist hier stark gekürzt)



$$D_1=(p-k)^2-m^2\overset{\text{on-shell}}{=}k^2-2kp,\qquad D_3=k^2$$
$$D_2=(p'-k)^2-m^2=k^2-2kp'$$
$$\longrightarrow ie\Lambda_\mu=e^3\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\frac{\gamma_\rho(\not p-\not k+m)\gamma_\mu(\not p-\not k+m)\gamma^\rho}{D_1D_2D_3}$$

Jetzt muß man beachten, daß $pu=mu$ ist und nur Terme betrachten, die zu $(p+p')_\mu$ beitragen

$$ie\Lambda_\mu=\frac{e^3}{(2\pi)^4}\Big(-4\int\mathrm{d}^4k\frac{k_\mu\not k}{D_1D_2D_3}+4(p+p')_\mu\int\mathrm{d}^4k\frac{\not k}{D_1D_2D_3}$$
$$-4m\int\mathrm{d}^4k\frac{k_\mu}{D_1D_2D_3}+\cdots_{\text{Terme, die nur zu }\gamma_\mu\text{ beitragen}}\Big)\tag{7.11}$$

Einschub: **Feynman-Parameter-Integral**[3]
Es gilt

$$\frac{1}{D_1D_2D_3}=2\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{d}y\frac{1}{\big(yD_1+(x-y)D_2+(1-x)D_3\big)^3}$$
$$=2\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{d}y\frac{1}{(k^2-2kp_{xy})^3}\qquad p_{xy}=yp+(x-y)p'$$
$$=2\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{d}y\frac{1}{k-p_{xy})^2-p_{xy}^2}$$

$\big(p_{xy}^2=x^2m^2-q^2(xy-y^2)\big)$ Jetzt verschiebt man $k\to k+p_{xy}\dots$ und damit wird aus (7.11) z.B.

$$\int\mathrm{d}^4k\frac{k_\mu}{D_1D_2D_3}=2\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{d}y\int\mathrm{d}^4k\frac{k_\mu+p_{xy}}{[k^2-p_{xy}^2]^3}$$
$$=2\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{d}y\int\mathrm{d}^4k\frac{k_\mu+yp_\mu+(x-y)p'^\mu}{[k^2-x^2m^2]^3}$$

[3]Näheres im zweiten Teil (S. 87

Da man nur Terme proportional zu $(p+p')$ betrachtet, wird daraus

$$= 2(p+p')\frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x \mathrm{d}y \int \mathrm{d}^4k \frac{1}{[k^2-x^2-m^2]^3}\bigg|_{q^2:=0}$$

$$\int \mathrm{d}^4k \frac{\not{k}}{D_1D_2D_3} = 2\int_0^1\int_0^x \mathrm{d}y \int \mathrm{d}^4k \frac{y\not{p}+(x-y)\not{p}}{[k^2-p_{xy}]^3} = 2m\int_0^1\int_0^x \mathrm{d}y \int \mathrm{d}^4k \frac{x}{[k^2-x^2m^2]^3}\bigg|_{q^2:=0}$$

$$\int \mathrm{d}^4k \frac{k_\mu \not{k}}{D_1D_2D_3} = \gamma_\mu(\ldots) + m(p+p')_\mu \int_0^1 \mathrm{d}x\, x^2 \cdot \int_0^x \mathrm{d}y \int \mathrm{d}^4k \frac{1}{[k^2-x^2m^2]^3}\bigg|_{q^2:=0}$$

$$\longrightarrow ie\Lambda_\mu = \frac{e^3}{(2\pi)^4}(p+p')_\mu \cdot 4m \int_0^1 \mathrm{d}x\,(x^2-x^3)\underbrace{\int \frac{\mathrm{d}^4k}{[k^2-x^2m^2]^3}}_{\overset{\text{s.u.}}{=}-\frac{i\pi^2}{2x^2m^2}} \tag{7.12}$$

Der Wert des k-Integrals in der letzten Zeile ergibt sich dabei wie folgt. Man betrachtet

$$k^2 = (k^0)^2 - \vec{k}^2,$$

was aber so nicht rotationssymmetrisch ist, so daß man eine *Wick-Drehung*[4] durchführen muß. Man setzt $k^0 \to ik_E^0$ (E =Euklidisch). Das funktioniert, da in $m = m + i\varepsilon$ die Pole durch die Drehung nicht „relevant" verschoben werden.

$$\longrightarrow k^2 = -(k_E^0)^2 + \vec{k}^2) \equiv -k_E^2.$$

k_E ist nun ein rotationssymmetrischer euklidischer Vektor, so daß man Kugelkoordinaten einführen kann $r = |k_E| = \sqrt{k_E}$

$$\longrightarrow \int \frac{\mathrm{d}^4k}{[k^2-x^2m^2]^3} = -i\int \frac{\mathrm{d}^4k_E}{[k_E^2+x^2m^2]}$$

$$= -i\int_0^\infty r^3\mathrm{d}r \frac{1}{(r^2+x^2m^2)^3}\underbrace{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi \int_0^\pi \sin\theta_1 \mathrm{d}\theta_1 \int_0^\pi \sin^2\theta_2 \mathrm{d}\theta_2}_{=\mathrm{d}\Omega}$$

$$= -i\frac{\pi^2}{2x^2m^2}$$

(Man muß also nur die Oberfläche der 4-dim. Einheitskugel berechnen[5])

Somit wird also aus (7.12)

$$ie\Lambda_\mu = ie\frac{(p+p')_\mu}{2m} \cdot \underbrace{\left(\frac{-\alpha}{2\pi}\right)}_{=F_2(0)}$$

$$\longrightarrow \boxed{a = -F_2(0) = \frac{\alpha}{2\pi} = 0,0011\ldots}. \tag{7.13}$$

Der heutige Stand liegt bei 4-Schleifenordnung (+5 Schleifen teilweise), die exp. Genauigkeit ist $840 \cdot 10^{-11}$ wird aber in diesem Jahr auf $40 \cdot 10^{-11}$ in Brookhaven gesteigert. Die exp. Genauigkeit liegt in der Tat höher als die theoretische, was den Theoretiker natürlich „schmerzt"…

[4]Bei einer Wick-Drehung werden aus den 4 Minkowski-Koordinaten durch Drehung der reellen Zeit-Achse auf die imaginäre 4 euklidische Koordinaten, so daß man Polarkoordinaten einführen kann. Genaueres im zweiten Teil (S. 87).

[5]Genaueres ebenfalls im zweiten Teil bei dimensionaler Regularisierung (S. 88

Teil II

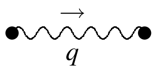
Quantenfeldtheorie II

QED-Wiederholung

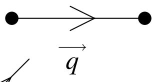
$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \mathcal{L}_{\text{fix}}(A) - \sum_f eQ_f\overline{\psi}_f\gamma_\mu\psi_f A^\mu + \sum_f \overline{\psi}_f(i\partial\!\!\!/ - m_f)\psi_f$$

$$\text{mit } F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \qquad \mathcal{L}_{\text{fix}} = -\frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2,\ \xi \in \mathbb{R} \text{ bel.}$$

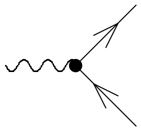
Feynman-Regeln im Impulsraum (f. $\varepsilon \to 0$)

Photon-Propagator 

$$\frac{i}{q^2 + i\varepsilon}\left(-g_{\mu\nu} + (1-\xi)\frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right)$$

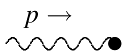
Fermion-Propagator 

$$\frac{i}{q\!\!\!/ - m_f + i\varepsilon} \equiv i\frac{q\!\!\!/ + m_f}{q^2 - m_f^2 + i\varepsilon}$$

Vertex 

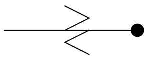
$$-\,ieQ_f\gamma_\mu + \text{Impulserhaltung}$$

äußere Linien:

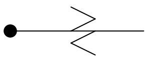
Photon 

$\varepsilon_\mu(p)$, phys. Pol.-Vektor (2 transv.)

$\varepsilon^2 = 2, \varepsilon \cdot p = 0$

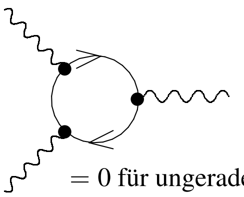
Fermionen 

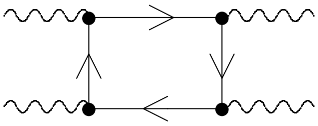
$$\text{einlaufendes} \begin{cases} u(p) & \text{Teilchen} \\ \overline{v}(p) & \text{Anti-Teilchen} \end{cases}$$



$$\text{auslaufendes} \begin{cases} \overline{u}(p) & \text{Teilchen} \\ v(p) & \text{Anti-Teilchen} \end{cases}$$

Bei geschlossenen Fermion-Schleifen kommt ein Faktor (-1) und die Spur der Matrizen hinzu; ist die Anzahl der Vertices in der geschlossenen Schleif ungerade, ist der Beitrag der Schleife =0 (Furry-Theorem).





$(-1)\text{Tr}\{\cdots\}$

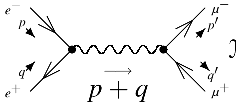
$= 0$ für ungerade Vertexanzahl (Furry-Theorem)

Das S-Matrixelement für einen Übergang vom Zustand $|i\rangle$ (mit m-Teilchen) in den Zustand $|f\rangle$ (mit n-Teilchen) ist

$$S_{fi} = (2\pi)^4\delta^4(P_f - P_i)\cdot\mathcal{M}, \quad f \neq i; \qquad P_j: \text{ Gesamtimpulse}$$

$$\mathcal{M} = \sum_{\text{alle}} \text{Feynman-Diagramme in geg. Ordnung} \cdot \left(\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\right)^{n+m}$$

Beispiel:



$$\mathcal{M} = \overline{v}(q)ie\gamma_\mu u(p)\frac{-ig^{\mu\nu}}{(p+q)^2}\overline{u}(p')ie\gamma_\nu v(q')\left(\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\right)^4$$

Der Wirkungsquerschnitt beim Übergang von zwei Teilchen $a + b$ in n-Teilchen (exklusive Summation bzw. Mittelung über die Spins/Helizitäten) ist gegeben als

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^{10}}{4\sqrt{(p_a - p_b)^2 - m_a^2 - m_b^2}}|\mathcal{M}|^2\delta^4(P_f - P_i)\frac{d^2 p_1}{2p_1^0}\cdots\frac{d^2 p_n}{2p_n^0}$$

Die niedrigste Ordnung bezeichnet man als Bornsche Näherung, die zugehörigen Graphen als Tree-Graphen (damit auch Tree-Graphen-Näherung). In der 1-Schleifenordnung werden (zusätzlich) alle Diagramme mit einer geschlossenen Schleife betrachtet. Dabei gibt es die Regel, daß man über den freien Impuls integriert ($\int d^4k/(2\pi)^4$ über freien Impuls k).

Erhält man aus der Bornschen Näherung einen Beitrag ungleich Null, so stellt die 1-Schleifenordnung eine Korrektur dar. Gibt es die 0. Ordnung nicht, ist also die 1-Schleifenordnung die niedrigste Ordnung, dann ist der Prozeß unterdrückt (z.B. $\gamma\gamma$-Streuung)

Kapitel 8

QED in 1-Schleifenordnung

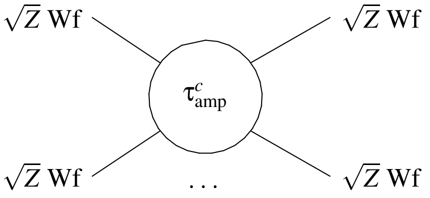
ist wohl experimentell „exzellent“ bestätigt.

8.1 Struktur von 1-Schleifenamplituden

Die Amplitude entspricht dem S-Matrix-Element, die äußeren Impulse sind on-shell $p^2 = m^2$ bzw. $p^0 = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$. Nach dem LSZ-Theorem ergibt sich S_{fi} als

$$S_{fi} = \left(\sqrt{Z}\right)^N \tau^c_{\mathrm{amp}}\big|_{\mathrm{on-shell}} \cdot \text{Wellenfunktion der äußeren Teilchen}$$

(s. Abb. 8.1) Der Faktor $\sqrt{Z}$ ergibt sich dabei aus



$$\mathrm{Wf} = \begin{cases} 1 & \text{Skalar} \\ \varepsilon_\mu & \text{Photon} \\ \left.\begin{matrix} u, \overline{u} \\ v, \overline{v} \end{matrix}\right\} & \text{Fermionen} \end{cases}$$

Abbildung 8.1: S_{fi} nach LSZ-Theorem

- LSZ-Theorem, schwacher Asymptotenlimes

  $$\lim_{t\to\pm\infty} \langle b|\phi(x)|a\rangle = \sqrt{Z}\langle b|\phi_{\mathrm{in}}(x)|a\rangle$$

- Källen-Lehman-Darstellung

  $$\Delta(q^2) = -\frac{Z}{q^2 - m^2 + i\varepsilon} + \int\limits_{m_1^2 > 4m^2}^{\infty} \mathrm{d}\mu^2 \frac{\sigma(\mu^2)}{q^2 - \mu^2 + i\varepsilon} \overset{q^2\to m^2}{\approx} \frac{Z}{q^2 - m^2} + \cdots$$

  mit Res=Z und Pol bei der physikalischen Masse ($q^2 = m^2$).

Anmerkung: Die Regel, den Faktor $\sqrt{Z}$ in den Feynman-Graphen an jede äußere Linie anzumultiplizieren kommt daher, daß aus der Källen-Lehmann-Darstellung ein Z folgt, während aus dem LSZ-Theorem ein $1/\sqrt{Z}$ kommt. In 1-Schleifenordnung ist

$$Z = 1 + e^2 z_1^2 \cdots, \qquad \sqrt{Z} = 1 + \frac{z_1^2}{2} e^2 + \cdots$$

Z wird bestimmt durch Berechnung des Residuums des vollständigen Propagators (der in 1-Schleifen-Ordnung die Selbstenergie enthält, die in der QED wegen des Furry-Theorems nur aus einem Graphen besteht, i.a. aber aus zweien).

Elemente von 1-Schleifengraphen (s. Abb. 8.2)

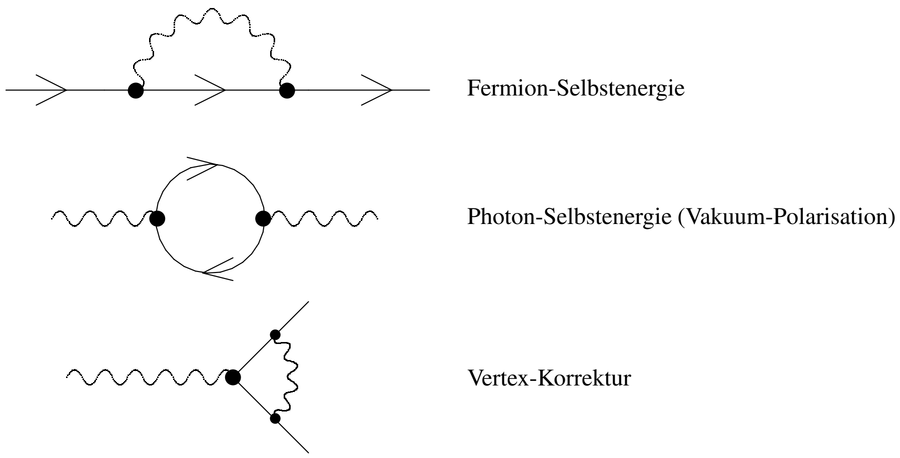


Abbildung 8.2: Elemente von 1-Schleifengraphen

Diese Graphen können aufgefaßt werden als Korrekturen zum Fermion und Photon-Propagator bzw. zum $ff\gamma$-Vertex. Sie sind allesamt divergent sind. Das liegt daran, daß diese Elemente alle proportional zum logarithmischen Integral $\int \frac{d^4q}{k^4}$ sind, welches für $k \to \infty$ divergent ist (UV-Divergenz). Das wiederum liegt daran, daß die Theorie Probleme mit kleinsten Abständen hat (im Impulsraum eben mit großen Impulsen), die Teilchen nicht punktförmig sind.

Um diese Problem in den Griff zu bekommen, muß die Theorie (in der gewünschten Ordnung, hier $O(g^2)$) „renormiert“ werden. Dazu sind zwei Schritte durchzuführen

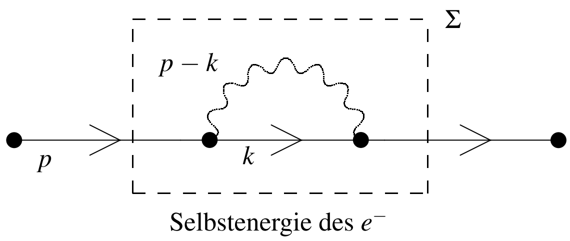
- Untersuchung der Divergenzstrukturen durch „*Regularisierung*“.

- Beseitigung der Regularisierungs-Parameter in den physikalischen Größen („*Renormierung*“)

8.2 Elektron-Selbstenergie

Im folgenden werden die im Fermion-Propagator auftretenden Divergenzen untersucht. Das wesentliche Ziel der Regularisierung ist nämlich, die Divergenz-Strukturen der jeweiligen Graphen offenzulegen, damit man sie später wegrenormieren kann.

Die Elektron-Selbstenergie ist Bestandteil des Fermion-Porpagators in 1-Schleifen-Ordnung (s. Abb. 8.3)



$$= \frac{i}{\not p - m}\left(i\Sigma(p)\right)\frac{i}{\not p - m}, \qquad m \equiv m - i\varepsilon$$

Abbildung 8.3: Elektron-Selbstenergie

$$\begin{aligned}
i\Sigma(p) &= \int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}(ie\gamma_\mu)\frac{i}{\not k - m}(ie\gamma_\nu)\frac{-g^{\mu\nu}}{(p-k)^2-\lambda^2} \\
\Sigma(p) &= ie^2\int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\frac{\gamma_\mu \not k \gamma^\mu + m\gamma_\mu\gamma^\mu}{(k^2-m^2)\big((p-k)^2-\lambda^2\big)}
\end{aligned} \tag{8.1}$$

dabei ist $\lambda \neq 0, \lambda \to 0$ die Photonregulatormasse, die eingeführt wird, zur Verhinderung von Infrarot-Divergenzen. Für $k \to \infty$ ergibt sich in obigem Ausdruck die besagte UV-Divergenz. Für die Regularisierung gibt es drei Möglichkeiten

1. Impuls-Cut-Off $|\vec{p}| < \Lambda$, Λ groß $\longrightarrow$ nicht lorentzinvariant.

2. *Pauli-Villars-Methode*

   $$\text{ersetze: } \frac{1}{k^2-m^2} \longrightarrow \frac{1}{k^2-m^2} - \frac{c}{k^2-\Lambda^2} \overset{(c=1)}{=} \frac{\Lambda^2-m^2}{(k^2-m^2)(k^2-\Lambda^2)} \qquad \Lambda \gg m.$$

   Oder allgemein

   $$\frac{1}{k^2-m^2} \longrightarrow \frac{1}{k^2-m^2} - \sum_j \frac{C_j}{k^2-\Lambda^2},$$

   wobei die C_j Konstanten sind, die so gewählt werden, daß das Integral konvergiert. Evtl. muß man obigen Schritt mehrmals ausführen, da einige Integrale, die auftreten können quadratisch divergent sind, d.h., nach einmaligem Addieren eines Terms $\sim \frac{1}{k^2}$ sind derartige Integrale noch immer divergent. Man muß also solange solche Terme dazuaddieren, bis eine $\frac{1}{k^6}$-Proportionalität entsteht und die Integrale konvergieren.

   Bei der Pauli-Villars-Regularisierung kommt eine neue Massenskala hinzu (wegen Λ), was aber nicht so schlimm ist, da die QFT bei derart hohen Energien scheinbar nicht mehr gültig ist.

3. Dimensionale Regularisierung (hier) 1972, t'Hooft, Bollini, Giambiagi (?). Der Vorteil dieser Methode ist, daß sie „elegant" ist und auch bei nichtabelschen Eichtheorien ihre Gültigkeit behält. Der Nachteil ist, daß sie sehr „formal" ist.

   Die Idee ist, daß man das 4-dim. Integral ersetzt

   $$\int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4} \longrightarrow \int \frac{\mathrm{d}^Dk}{(2\pi)^D} \qquad \text{mit } D < 4 \text{ (!), so daß Integrale konv.}$$

   Die Wirkung

   $$S = \int \mathrm{d}^Dx\, \mathcal{L}^{(D)}$$

   muß dimensionslos sein, die Ladung e ist aber dimensionsbehaftet

   $$\text{da } \dim[S] = 1,\ \dim[x] = 1/M,\ \text{d.h. } \dim[\mathcal{L}] = M^D \quad \longrightarrow \dim[e] = M^{(4-D)/2}.$$

   Daher

   $$e^2 \to e^2 \cdot \mu^{4-D}, \qquad \mu\text{: neue Massenskala}$$

   Somit wird also, wenn man alle „Änderungen" zusammenfaßt

   $$e^2 \underbrace{\int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}}_{M^4} \longrightarrow e^2 \underbrace{\mu^{4-D}\int \frac{\mathrm{d}^Dk}{(2\pi)^D}}_{M^4}.$$

Da man von 4 zu D Dimensionen übergegangen ist, müssen alle bisher benutzten Größen/Formeln in D Dimensionen berechnet werden. Die Dirac-Algebra in D-Dimensionen lautet

$$\gamma_\mu,\ \mu = 0, 1, \ldots, D-1,\ \ [\gamma_\mu, \gamma_\nu] = 2g_{\mu\nu} \cdot \mathbf{1}$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix} \quad (D \times D), \quad g^\mu{}_\mu = D.$$

Und damit (Übungen)

$$\gamma_\mu \gamma^\mu = D \cdot \mathbf{1}, \quad \gamma_\mu \not{a} \gamma^\mu = (2-D)\not{a}, \ldots \tag{8.2}$$

Der Rest verhält sich wie bisher, z.B.

$$\mathrm{Tr}\{\gamma_\mu \gamma_\nu\} = 4g_{\mu\nu} \quad = \mathrm{Tr}\{\gamma_\mu \not{a} \gamma_\nu \not{b}\} \qquad = 4(a_\mu b_\nu + a_\nu b_\mu - a \cdot b g_{\mu\nu}) \text{ usw.}$$

Regularisierte Selbstenergie

$$\Sigma(p) \overset{(8.2)}{=} ie^2 \mu^{4-D} \int \frac{\mathrm{d}^D k}{(2\pi)^D} \frac{(2-D)\not{k} + mD \cdot \mathbf{1}}{(k^2 - m^2)\big((k-p) - \lambda^2\big)}$$

Es ergeben sich zwei Typen von Integralen

- Skalares 2-Punkt-Integral

$$\mu^{4-D} \int \frac{\mathrm{d}^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k^2 - m^2)\big((k-p)^2 - \lambda^2\big)} = \frac{i}{16\pi^2} B_0(p^2, m, \lambda)$$

  Aus der Lorentzinvarianz folgt, daß das B_0 nur von p^2 abhängen kann.

- Vektor-2-Punkt-Integral[1]

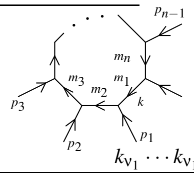
$$\mu^{4-D} \int \frac{\mathrm{d}^D k}{(2\pi)^D} \frac{k_\mu}{(k^2 - m^2)\big((k-p)^2 - \lambda^2\big)} = \frac{i}{16\pi^2} B_\mu(-p, m, \lambda)$$
$$= \frac{i}{16\pi}(-p_\mu) B_1(p^2, m, \lambda)$$

Jetzt sind zwei Schritte durchzuführen

- Rückführung auf skalare Integrale (algebraisch)
- Berechnung der skalaren Integrale

---

[1] **Allgemeines n-Punkt-Integral**



$$\mu^{4-D} \int \frac{\mathrm{d}^D k}{(2\pi)^D} \frac{k_{\nu_1} \cdots k_{\nu_1}}{(k^2 - m_1^2)\big((k+p_1)^2 - m_1^2\big) \ldots \big((k + p_1 + \cdots + p_{n-1})^2 - m_n^2\big)}$$

$$\Sigma(p) = ie^2 \frac{i}{16\pi^2}\big((2-D)(-\not{p})B_1 + mDB_0\big)$$
$$\equiv \underbrace{\Sigma_V(p^2)}_{\text{Vektoranteil}}(-\not{p}) + \underbrace{\Sigma_S(p^2)}_{\text{skalarer Anteil}} \qquad \Sigma_{V,S}: \text{ skalare Funktionen}$$

Am Beispiel wird Schritt 1 illustriert. Man multipliziert das Integral zunächst mit p^μ und erhält (wenn man den Faktor μ^{4-D} wegläßt)

$$\begin{aligned}
&\int \frac{\mathrm{d}^D k}{(2\pi)^D} \frac{k_\mu \cdot p^\mu}{(k^2-m_1^2)\big((k+p)^2-m_2^2\big)} \\
&\qquad = \frac{i}{16\pi^2} p_\mu \cdot B_1(-p,m_1,m_2) p^\mu = \frac{i}{16\pi^2} p^2 B_1(p^2,m_1,m_2) \\
&\qquad = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}^D k}{(2\pi)^D} \frac{\big((k+p)^2-m_2^2\big)+m_2^2-k^2-p^2}{(k^2-m_1^2)\big((k+p)^2-m_2^2\big)} \\
&\qquad = \underbrace{\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2-m_1^2}}_{\sim A(m_1)} - \underbrace{\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k+p)^2-m_2^2}}_{\sim A(m_2)} \\
&\qquad\quad + \frac{m_2^2-m_1^2-p^2}{2} \underbrace{\int \frac{\mathrm{d}^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k^2-m_1^2)\big((k+p)^2-m_2^2\big)}}_{\sim B_0(p^2,m_1,m_2)}
\end{aligned}$$

$A(m_1)$ ist ein 1-Punkt-Integral und beschreibt einen Tadpole (Loop mit einem Vertex). Damit erhält man

$$\longrightarrow \boxed{p^2 B_1(p^2,m_1,m_2) = \frac{1}{2}A(m_1) - \frac{1}{2}A(m_2) + \frac{m_2^2-m_1^2-p^2}{2} B_0(p^2,m_1,m_2)}.$$

Zum 2. Schritt (Berechnung der skalaren Integrale): Man benötigt die *Feynman-Parameter-Integrale* (hier für $n=2$)[2]

$$\text{Regel:} \quad \frac{1}{a\cdot b} = \int_0^1 \mathrm{d}x \frac{1}{\big(a(1-x)+bx\big)^2}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{i}{16\pi^2} B_0(p^2,m_1,m_2) \\
&\overset{k'=k-xp}{=} \frac{i}{16\pi^2} \int_0^1 \mathrm{d}x\, \mu^{4-D} \cdot \int \frac{\mathrm{d}^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{\underbrace{\big[k^2-x^2p^2+x(p^2+m_1^2-m_2^2)-m_1^1+i\varepsilon\big]^2}_{=k^2-Q(x,p^2,m_1,m_2)}]^2},
\end{aligned}$$

d.h., der Integrand ist nur noch von k^2 abhängig[3].

Die Auswertung erfolgt in D-dimensionalen Polarkoordinaten, dabei wird eine *Wick-Drehung* durchgeführt.

Eine Wick-Drehung ist möglich, wenn bei zwei Polen einer oberhalb und einer unterhalb der reellen Achse liegt (z.B. $k^0 = \pm\sqrt{\vec{p}^2+m^2} \mp i\varepsilon$). Dann kann man nämlich einen Integrationsweg wie in Abb. 8.4 wählen, der keine Pole einschließt. Damit verschwindet das Integral über diesen Weg. Da die radialen Anteile ebenfalls für $r \to \infty$ verschwinden, entsprechen sich die Anteile längs der reellen und der imaginären Achse (bis aufs Vorzeichen), so daß man längs der imaginären Achse integrieren kann.

[2] Allgemeines Feynman-Parameter-Integral

$$\frac{1}{D_1\ldots D_N} = \int_0^1 \mathrm{d}x_1 \int_0^{x_1} \mathrm{d}x_2 \cdots \int_0^{x_{n-2}} \mathrm{d}x_{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{\big[x_{n-1}D_1+(x_{n-2}-x_{n-1})D_2+\cdots+(1-x_1)D_n\big]^n}$$

(Beweis durch vollständige Induktion (Übung)).

[3] Allgemein gilt für n-Punkt-Integrale

$$\cdots \int \mathrm{d}^D k \frac{1}{\big[k^2-Q(x_1,\ldots,x_{n-1},p_i^2,p_i\cdot p_j,m_1,\ldots,m_n)\big]^n}$$

Dabei ist Q eine quadratische Funktion von $x_1,\ldots,x_{n-1}$.

Wendet man dieses Verfahren auf die Zeitkomponente des Integrationsimpulses an, erhält man statt eines Minkowski-Vektors (der keine positiv definite Norm hat) einen euklidischen Vektor und kann Polarkoordinaten einführen.

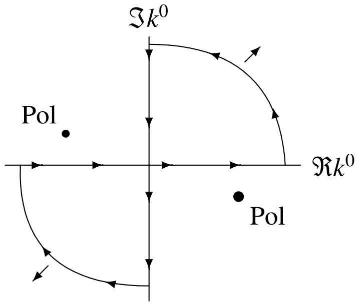


Abbildung 8.4: Wickdrehung. Das Integral längs der reellen Achse („von links nach rechts“) entspricht hier dem längs der imaginären Achse („von oben nach unten“).

$$k^2 = (k^0)^2 - \vec{k}^2 \longrightarrow k^0 = ik_E^0, \vec{k} = \vec{k}_E = (k_E^1, \dots, k_E^{D-1})$$
$$\longrightarrow \mathrm{d}^D k = i\mathrm{d}^D k_e, \quad k^2 = -(k_E^0)^2 - \vec{k}_E^2; \quad k_E^2 = (k_E^0)^2 + \vec{k}_E^2.$$

Nach der Wick-Drehung ergibt sich

$$\mu^{4-D} \int \frac{\mathrm{d}^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k^2 - Q + i\varepsilon)^n} = i\mu^{4-D} \int \frac{\mathrm{d}^D k_E}{(2\pi)^D} \frac{(-1)^n}{(k_E^2 + Q - i\varepsilon)^n}$$

Führt man nun Polarkoordinaten ein

$$r = \sqrt{k_E^2}, \quad \varphi, \quad \theta_1, \dots, \theta_{D-2},$$

erhält man daraus

$$\int \mathrm{d}^D k_E f(k_E^2) = \int_0^\infty r^{D-1} \mathrm{d}r f(r^2) \int \mathrm{d}\Omega^{(D)}, \tag{8.3}$$

$$\text{mit } \int \mathrm{d}\Omega^{(D)} = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^\pi \sin\theta_1 \mathrm{d}\theta_1 \int_0^\pi \sin^2\theta_2 \mathrm{d}\theta_2 \cdot \int_0^\pi \sin^{D-2}\theta_{D-2} \mathrm{d}\theta_{D-2} = \frac{(2\pi)^{D/2}}{\Gamma(D/2)} \tag{8.4}$$

$\int \mathrm{d}\Omega^{(D)}$ ist die Oberfläche der D-dim. Einheitskugel (Beweis von (8.4): Übung). Somit wird also aus (8.3)

$$\int \mathrm{d}^D k_E f(k_E^2) \overset{r \to R^{1/2}}{=} \int_0^\infty \mathrm{d}R \, \frac{1}{2} R^{\frac{D}{2}-1} f(R) \int \mathrm{d}\Omega^{(D)}.$$

Und es ist

$$\mu^{4-D} \int \frac{\mathrm{d}^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k_E^2 + Q)^n} = \mu^{4-D} \frac{\pi^{D/2}}{(2\pi)^D} \frac{\Gamma(n - \frac{D}{2})}{\Gamma(n)} Q^{-n+\frac{D}{2}} \tag{8.5}$$

Diese Gleichung ist gültig für $n \in \mathbb{R},\ n \geqslant 1$ bel.

Die Gammafunktion hat folgende Eigenschaften:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty \mathrm{d}t \, t^{z-1} e^{-t}$$

ist analytisch für $z \in \mathbb{C}$ bis auf $z = 0, -1, -2, \ldots$.

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \longrightarrow \text{„Fakultät"}, \qquad \Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(z \to 0) = \frac{1}{z} - \gamma + O(z), \qquad \gamma = -\Gamma'(1) = 0.577\ldots$$

$$\longrightarrow \boxed{\Gamma(-1+z) = -\frac{1}{z} + \gamma - 1 + O(z)}.$$

γ bezeichnet man als *Eulersche Konstante*

Im folgenden ist $D = 4 - \varepsilon, \varepsilon \to 0$. Das ist möglich, da die rechte Seite in (8.5) die analytische Fortsetzung der linken Seite ist und die Gleichung daher für „beliebige" Dimension D gilt.

Die Integrale sind also in D analytisch fortsetzbar mit Polen bei $(n - D/2) = 0, -1, -2, \ldots$.

Für ganzzahlige D folgt weiter

$D = 4:$ $(n = 1, 2)$ (1; 2)-Pkt.-Integrale divergieren wie $\frac{1}{4-D}$

$\longrightarrow$ *logarithmische Divergenzen*

$D = 2:$ $(n = 1)$ 1-Pkt.-Integrale, *quadratische Divergenzen*

$\sim \Lambda^2$ bei Pauli-Villars

Allgemein: Falls die Divergenz nur bei $D = 4$ auftritt, erhält man eine Proportionalität $\sim \log\Lambda$ (bei Pauli-Villars), d.h., eine logarithmische Divergenz. Bei quadratischen Divergenzen kann man eine Art „Feintuning" bei der Renormierung durchführen, indem man die Cut-Off-Parameter an die Experimente anpaßt.

Die Art, *wie* die Integrale divergieren kann man in der dimensionalen Regularisierung nur „hier" erkennen, da sich später ergibt, daß im Prinzip alle Divergenzen proportional zu $\frac{2}{\varepsilon}$ mit $\varepsilon \to 0$ sind.

Es folgt die Auswertung der divergenten n-Punkt-Integrale (A_0, B_0) in der dimensionalen Regularisierung für $\varepsilon \to 0$ (d.h. $D \to 4$), wo möglich (Wick-Drehung bereits durchgeführt).

$\underline{n = 1:}$ $\quad (Q = m^2)$

$$\frac{i}{16\pi^2} A(m) = -i\mu^{4-D} \int \frac{\mathrm{d}^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k_E^2 + m^2} = \frac{-i\mu^\varepsilon}{(4\pi)^{2-\varepsilon/2}} \Gamma(-1 + \varepsilon/2) \cdot (m^2)^{1-\varepsilon/2}$$

$$\longrightarrow A(m) = -m^2 \underbrace{\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right)^{\varepsilon/2} (4\pi)^{\varepsilon/2}}_{=\exp\left(\frac{\varepsilon}{2}\log\left[\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right]\right)} \cdot \Gamma(-1 + \varepsilon/2)$$

$$\stackrel{\varepsilon \to 0}{=} -m^2 \left(-\frac{2}{\varepsilon} + \gamma - 1 + O(\varepsilon^3)\right) \underbrace{e^{\frac{\varepsilon}{2}[\log 4\pi + \log\frac{\mu^2}{m^2}]}}_{\approx 1 + \frac{\varepsilon}{2}[\ldots] + O(\varepsilon^3)}$$

$$= m^2 \Big[\underbrace{\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \log 4\pi}_{=:\Delta} + \log\frac{\mu^2}{m^2} + 1\Big] + O(\varepsilon^3).$$

$$\longrightarrow \boxed{A(m) = m^2 \left[\Delta + \log\frac{\mu^2}{m^2} + 1\right] + O(\varepsilon^3)}.$$

$\underline{n=2:}$ $\quad Q = x^2p^2 - x(p^2+m_1^2-m_2^2)+m_1^2 - i\varepsilon$

$$\frac{i}{16\pi^2}B_0 = \int_0^1 \mathrm{d}x\, \frac{i}{16\pi^2}\mu^\varepsilon(4\pi)^{\varepsilon/2}\frac{\Gamma(\varepsilon/2)}{\gamma(2)}Q^{-\frac{\varepsilon}{2}}$$

$$\longrightarrow B_0 = \ldots = \int_0^1 \mathrm{d}x \left[\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \log 4\pi - \log\frac{Q}{\mu^2}\right] + O(\varepsilon^3)$$

$$\longrightarrow \boxed{B_0(p^2,m_1,m_2) = \Delta - \int_0^1 \mathrm{d}x\, \log\left(\frac{p^2x^2 - x(p^2+m_1^2-m_2^2)+m_1^2-i\varepsilon}{\mu^2}\right)}$$

analytisch durch Logarithmen ausdrückbar.

Spezialfälle: $m_1 = m_2 =: m$ (Übungen)

$$\left|\vec{p}\right| \ll m^2: \qquad B_0 \approx \Delta - \log\frac{m^2}{\mu^2} + \frac{p^2}{6m^2} + O\left(\frac{p^4}{m^4}\right)$$

$$\left|\vec{p}\right| \gg m^2: \qquad B_0 \approx \Delta - \log\frac{|p^2|}{\mu^2} + 2 + i\pi\Theta(p^2-4m^2)$$

Letzteres heißt, daß für $p^2 > 4m^2$ der Zerfall nach $2m$ möglich ist. Der Imaginärteil in der letzten Gleichung wird erklärt durch das „Optische Theorem“, welches besagt, daß immer ein Imaginärteil auftritt, wenn ein Zerfall formal möglich ist.

Zurück zur Selbstenergie: Aus (8.1) wird

$$\Sigma(p) = ie^2\frac{i}{16\pi^2}\Big(\not p(2-\varepsilon)B_1(p^2,m,\lambda) + m\underbrace{(4-\varepsilon)B_0(p^2,m,\lambda)}_{=:\Sigma_S}\Big) \tag{8.6}$$

(Beachte: Photonregulatormasse $\lambda = 0$, sofern möglich.) Dabei ist

$$p^2B_1(p^2,m,\lambda) = \frac{1}{2}A(m) - \underbrace{\frac{1}{2}A(\lambda)}_{=0\text{ f. }\lambda\to 0} + \frac{\cancel{(\lambda^2)} - m^2 - p^2}{2}B_0(p^2,m,\lambda)$$

und

$$B_1(p^2,m,\lambda) = -\frac{1}{\varepsilon} + \text{endliche Terme}$$

Aufgrund dieser Struktur des B_1 ist es einsichtig, daß man in (8.6) das ε in $(4-\varepsilon)$ bzw. $(2-\varepsilon)$ *nicht* vernachlässigen darf, da durch die Multiplikation $\varepsilon\cdot 1/\varepsilon$ noch endliche Terme auftreten, die letztlich zur Physik beitragen.

$$\Sigma(p) = -\frac{\alpha}{4\pi}\big[\not p(\underbrace{2B_1+1}_{=:\Sigma_V(p^2)}) + m(\underbrace{4B_0-2}_{=:\Sigma_S(p^2)})\big] = -\frac{\alpha}{4\pi}\Big[(\not p - m)\Sigma_V(p^2) + m\big(\Sigma_V(p^2)+\Sigma_S(p^2)\big)\Big]. \tag{8.7}$$

Für die Anteile Σ_S und Σ_V und $\lambda = 0$ kann man $p^2 = m^2$ setzen, während die Ableitungen $\Sigma'_{V,S}$ im gleichen Falle divergieren. Die Entwicklung der Selbstenergie $\Sigma(p)$ um $\not p = m$ (beachte: $p^2 - m^2 = (\not p - m)(\not p + m)$ mit $\not p + m = 2m$) lautet

$$\begin{aligned}
\Sigma(p) &= \Sigma(\not p = m) + (\not p - m)\Sigma'(\not p = m) + O(\not p - m)^2\\
\Sigma'_{V,S}(p^2) &= \Sigma_{V,S}(m^2) + 2m(\not p - m)\Sigma'_{V,S}(m^2) + O(\not p - m)^2\\
\longrightarrow \Sigma(p) &= \underbrace{m\big(\Sigma_V(m^2)+\Sigma_S(m^2)\big)}_{=:B} + (\not p - m)\Big(\underbrace{\Sigma_V(m^2) + 2m^2\big[\Sigma'_V(m^2)+\Sigma_S(m^2)\big]}_{=:A}\Big) + O(\not p - m)^2
\end{aligned}$$

Somit kann man die Selbstenergie in folgende Form bringen

$$\Sigma(p) = \mathbf{1} \cdot B + (\not{p} - m) \cdot A + \text{endliche Terme} \tag{8.8}$$

Berechnet man nun den Gesamtpropagator (Summation über freien Propagator und Selbstenergie-Graphen), ergibt sich

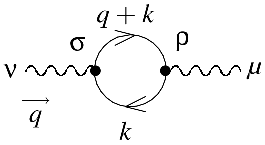
$$\frac{i}{\not{p} - m} + \frac{i}{\not{p} - m}\big(i\Sigma(p)\big)\frac{i}{\not{p} - m} = \frac{i}{\not{p} - m + \Sigma(p)} = \frac{i}{(\not{p} - m)(1 + A) + B + \cdots}.$$

Das wäre in Abwesenheit von B „identisch“[4] mit (6.16).

Da aber das B nicht verschwindet (sogar divergent ist), liegt der Pol *nicht* mehr bei der der physikalischen Masse m. Dementsprechend muß das m umdefiniert werden, um das B zu kompensieren ($\longrightarrow$ Massenrenormierung).

8.3 Photon-Selbstenergie, Vakuum-Polarisation

Vorerst wird nur der Beitrag von Elektron/Positron berechnet, später dann über alle Fermionen summiert. Das Matrixelement lautet in Feynman-Eichung ($\xi = 1$)



$$\frac{-ig^{\mu\rho}}{q^2}\left(-i\Sigma^{\gamma}_{\rho\sigma}\right)\frac{-ig^{\nu\sigma}}{q^2}.$$

Der Index γ bedeutet: zum Photon gehörig. Die Selbstenergie setzt sich zusammen aus zwei Termen

$$\Sigma^{\gamma}_{\rho\sigma} = g_{\rho\sigma}\Sigma^{\gamma}(q^2) + q_\rho q_\sigma \Sigma^{\gamma}_{L}.$$

Der Index L bedeutet longitudinal, was in diesem Fall bedeutet, daß das Σ_L den kompletten longitudinalen Anteil trägt. Allerdings trägt dieses Σ_L wegen der Stromerhaltung[5] nicht zum Matrixelement bei und wird ab jetzt nicht weiter betrachtet, d.h. $\Sigma^{\gamma}_{L} \to \Sigma^{\gamma}$.

Wie im vorigen Kapitel wird nun die dimensionale Regularisierung durchgeführt

$$\Sigma^{\gamma}_{\rho\sigma} = -ie^2 \cdot 4 \cdot \mu^{4-D} \int \frac{\mathrm{d}^D k}{(2\pi)^D} \cdot \frac{m^2 g_{\rho\sigma} + 2k_\rho k_\sigma - g_{\rho\sigma}(k^2 + k \cdot q) + \overbrace{(k_\rho q_\sigma + k_\sigma q_\rho)}^{\text{weglassen}}}{(k^2 - m^2)(k+q)^2 - m^2}$$

Der Term $k_\rho q_\sigma + k_\sigma q_\rho$ wird weggelassen, da er einen Beitrag zu Σ_L liefert. Betrachtet man z.B. das Integral mit einem der beiden Summanden, erhält man

$$q_\rho \int \frac{\mathrm{d}^D k}{(2\pi)^D} \frac{k_\sigma}{(k^2 - m^2)[(k+q)^2 - m^2]} \sim q_\rho B_\sigma(q^2, m, m) \equiv -q_\rho q_\sigma B_1,$$

was somit zum longitudinalen Anteil beiträgt.

Neu ist das Tensor-2-Punkt-Integral

$$\mu^{4-D} \int \frac{\mathrm{d}^D k}{(2\pi)^D} \frac{k_\rho k_\sigma}{(k^2 - m^2)\big((k+q)^2 - m^2\big)} = \frac{i}{16\pi^2} B_{\rho\sigma},$$

welches man wieder in skalare Integrale aufspalten kann

$$B_{\rho\sigma} = g_{\rho\sigma} \cdot B_{22} + q_\rho q_\sigma \cdot B_{21}$$

[4] bis auf endliche Terme (die aber den Pol nicht verschieben würden, da prop. $(\not{p} - m)$), denn B ist divergent.

[5] im Impulsraum ist die Beziehung $\partial_\mu j^\mu = \partial_\mu \overline{\psi}\gamma^\mu\psi = 0$ proportional zu $\overline{u}\not{p}u = 0$, so daß Terme, die proportional zu q_μ sind, bei der Berechnung des Matrixelements herausfallen.

B_{21} trägt auch zu Σ_L^γ bei und wird demgemäß nicht weiter betrachtet. B_{22} kann man auf B_0- und A-Integrale durch Multiplikation mit $g^{\rho\sigma}$, $q^\rho q^\sigma$ zurückführen. Man erhält (Übung)

$$\begin{aligned}
&B_{22}(q^2, m_1, m_2) \\
&\quad = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}A(m_2) + m_1^2 B_0(q^2, m_1, m_2) + \frac{q^2 + m_1^2 - m_2^2}{2} B_1(q^2, m_1, m_2) + \frac{m_1^2 + m_2^2}{2} - \frac{q^2}{6}\right)
\end{aligned}$$

Setzt man alles ein und faßt zusammen, erhält man schließlich

$$\Sigma^\gamma(q^2) = \frac{\alpha}{3\pi}\left[q^2\left(\Delta - \log\frac{m^2}{\mu^2}\right) + (q^2 + 2m^2)\overline{B_0}(q^2, m, m) - \frac{q^2}{3}\right]$$

mit $\overline{B_0} = B_0(q^2, m, m) - B_0(0, m, m) = \int_0^1 \mathrm{d}x \, \log \frac{q^2(x^2 - x) + m^2 - i\varepsilon}{m^2}$. Es ist also

$$\Sigma^\gamma(q^2) = q^2 \cdot \Pi^\gamma(q^2)$$

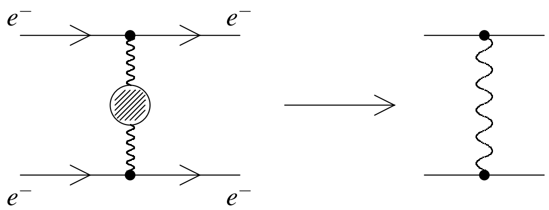
Dieses so definierte Π^γ hat folgende Eigenschaften

- $\Pi^\gamma(0) = \frac{\alpha}{3\pi}\left(\Delta - \log\frac{m^2}{\mu^2}\right) = \text{const}^6$.
- $\Pi^\gamma(q^2) = \Pi^\gamma(0) + \frac{q^2}{5m^2} + O\left(\frac{q^4}{m^4}\right), \quad |q^2| \ll m^2$.
- $\Pi^\gamma(q^2) = \Pi^\gamma(0) + \frac{\alpha}{3\pi}\left(\frac{5}{3} - \log\frac{|q^2|}{m^2}\right) + i\pi\Theta(q^2), \quad |q^2| \gg m^2$.

Berechnet man den Photon-Propagator (der Term proportional zu $q_\mu q_\nu$ wird dabei, wie oben beschrieben, weggelassen), erhält man

$$\begin{aligned}
&\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} + \frac{-ig_{\mu\rho}}{q^2}\Big(\underbrace{-i\Sigma^\gamma_{\rho\sigma}}_{\equiv -ig_{\rho\sigma}q^2\Pi^\gamma(q^2)}\Big)\frac{-ig^{\sigma\nu}}{q^2} = -\frac{ig_{\mu\nu}}{q^2}\left[1 - \Pi^\gamma(q^2)\right] \overset{q\to 0}{=} -\frac{ig_{\mu\nu}}{q^2}\left[1 - \Pi^\gamma(0)\right] \\
&\qquad \overset{\text{Källen-Lehmann}}{=} -\frac{ig_{\mu\nu}}{q^2} \cdot Z_\gamma \\
&\longrightarrow Z_\gamma = 1 - \Pi^\gamma(0) = 1 - \frac{\alpha}{3\pi}\left(\Delta - \log\frac{m^2}{\mu^2}\right) \overset{!}{=} 1 + \delta Z_\gamma \\
&\qquad \longrightarrow \boxed{\delta Z_\gamma = -\Pi^\gamma(0)}.
\end{aligned}$$

„Graphisch“ passiert dabei folgendes



$\cdot\big(1 - \Pi^\gamma(0)\big)$,

d.h., um den vollständigen Propagator (für $q \to 0$) zu erhalten, genügt es den freien mit $(1 - \Pi^\gamma(0))$ zu multiplizieren.

Daraus folgt, daß das e in der Lagrange-Dichte nicht der klassischen Ladung entspricht, da man den Faktor Z^γ zu gleichen Teilen (jeweils $\sqrt{Z^\gamma}$) den Vertices zuschlägt, so daß sich die Ladung in folgender Weise ändert

$$e \longrightarrow e\sqrt{Z^\gamma}.$$

Um dies zu korrigieren, führt man die Ladungsrenormierung ein.

Bei der Summation über alle geladenen Fermionen ergibt sich

$$\Pi^{\gamma}(q^2) = \sum_{f=e,\mu,\tau;q} \Pi^{\gamma,f}(q^2) \quad \text{mit } \Pi^{\gamma,f} = Q_f^2[m \to m_f]$$

Für den Quark-Anteil gilt

$$\Pi^{\gamma,q} = \cdot \int_{4m\pi^2}^{\infty} \mathrm{d}s' \frac{R(e^+e \to q\overline{q} \to \text{Hadronen})}{s - s'}$$

Das $R(e^+ \ldots)$ bedeutet, daß man dieses $\Pi^{\gamma,q}$ aus den angegebenen Reaktionen in der Klammer bestimmen muß.

8.4 Vertex-Korrektur

$q^2 = (p - p')^2$

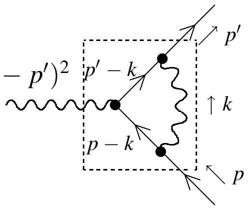


Abbildung 8.5: Vertexkorrektur am Beispiel der Elektronstreuung

Falls p und p' on-shell sind, entspricht der Graph (Abb. 8.5) einer Elektron-Streuung.

Mit $ie\Lambda_\mu$ wird die Vertex-Korrektur bezeichnet. Weiterhin wird für die Rechnung Feynman-Eichung $\xi = 1$ angenommen. Durch Anwendung der Feynmanregeln ergibt sich

$$\begin{aligned} ie\Lambda_\mu(p,p') &= \int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4} ie\gamma_\rho \frac{i}{\not p' - \not k - m} ie\gamma_\mu \frac{i}{\not p - \not k - m} ie\gamma_\sigma \frac{-ig^{\rho\sigma}}{k^2 - \lambda^2} \\ &= i^6 e^3 \int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma_\rho}{\not p' - \not k - m} \cdot \frac{\gamma_\mu}{\not p - \not k - m} \cdot \frac{\gamma^\rho}{k^2 - \lambda^2} \end{aligned}$$

Somit erhält man in der dimensionalen Regularisierung

$$\longrightarrow \Lambda(p,p') = -ie^3\mu^{4-D} \int \frac{\mathrm{d}^Dk}{(2\pi)^D} \gamma_\rho \frac{1}{\not p' - \not k - m} \gamma_\mu \frac{1}{\not p - \not k - m} \gamma^\rho \frac{1}{k^2 - \lambda^2} \tag{8.9}$$

Dabei wird, sofern möglich die Photonregulatormasse $\lambda \to 0$ gesetzt.

$$\Lambda_\mu(p,p') = \underbrace{\Lambda_\mu(p,p)}_{\text{divergiert f. } D\to 4} + \underbrace{\Lambda_\mu(p,p') - \Lambda_\mu(p,p')}_{=\Lambda_\mu^{\text{fin}}(p,p) \text{ endlich f. } D\to 4}$$

Die Berechnung von Λ^{fin} ist ein „technisches Problem“ und sehr aufwendig. Die Berechnung von $\Lambda(p,p)$ ist „technisch machbar“, wirft aber ein prinzipielles Problem (Begriff der elektrischen Ladung) auf.

8.4.1 Berechnung von $\Lambda(p,p)$

Benutze[7]

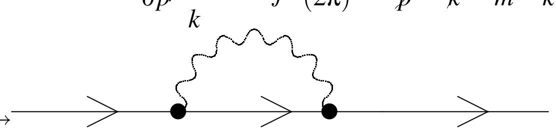
$$\frac{1}{\not p - k - m} \gamma_\mu \frac{1}{\not p - k - m} = -\frac{\partial}{\partial p^\mu} \frac{1}{\not p - \not k - m}.$$

[7]Zum Beweis dieser Identität betrachte man zwei Matrizen A, A^{-1}

$$0 = \partial_t E = \partial_t A^{-1}A = (\partial_t A^{-1})A + A^{-1}\partial_t A \quad \longrightarrow -\partial_t A^{-1} = A^{-1}\partial_t A A^{-1}$$

Setzt man für $A = \not p - \not k - m$, also für $A^{-1} = (\not p - \not k - m)^{-1}$ ein (und beachtet $\frac{\partial}{\partial p^\mu}A = \gamma_\mu$), folgt die Behauptung.

$$\longrightarrow \Lambda_\mu(p,p) = \frac{\partial}{\partial p^\mu} i e^2 \mu^{4-D} \int \frac{\mathrm{d}^D k}{(2\pi)^D} \gamma_\rho \frac{1}{\not p - \not k - m} \gamma^\rho \frac{1}{k^2 - \lambda^2}$$

$\longrightarrow$ 

$$\boxed{\Lambda_\mu(p,p) = \frac{\partial}{\partial p^\mu} \Sigma(p)} \quad \text{Ward-Identität} \tag{8.10}$$

Diese Ward (-Takahashi)-Identität wurde hier bei einer Rechnung auf 1-Schleifen-Niveau gefunden, gilt aber in allen Ordnungen (s. auch Kap. 8.7). Sie folgt allgemein aus der Symmetrie der Elektrodynamik (Stromerhaltung).

$$\Lambda_\mu(p,p) \overset{(8.7)}{=} \frac{\partial}{\partial p^\mu} \left(\not p \Sigma_V(p^2) + m \Sigma_S(p^2) \right)$$

Durch Ausführung der Ableitung und Festlegung der Impulse auf die Massenschale $\not p \to m, p^2 \to m^2$, erhält man Elektron-Streuung für Impulsübertrag $q^2 \to 0$. Das ist nur für Photonen kleiner Frequenz möglich und beschreibt die klassische Streuung von Licht an Elektronen (Thomson-Streuung).

Führt man eine Gordon-Zerlegung durch, erhält man

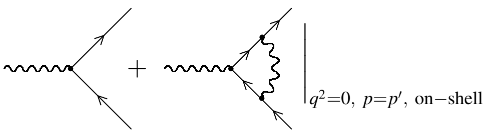
$$\overline{u} \gamma_\mu u = \overline{u} \left[\frac{(p+p')_\mu}{2m} + \frac{i}{2m} \sigma_{\mu\nu} (p'-p)^\nu \right] u \quad \text{mit } \sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu]$$

Für $p = p'$ ist damit $2m\gamma_\mu = 2p_\mu$ und deswegen

$$\longrightarrow \boxed{\Lambda_\mu(p,p) = \gamma_\mu \left(\Sigma_V(m^2) + 2m \left[\Sigma'_V(m^2) + \Sigma'_S(m^2) \right] \right)}$$

$$\Lambda_\mu(p,p) = \gamma_\mu \Lambda_0, \quad \Lambda_0 = \Sigma_V(m^2) + 2m \left[\Sigma'_V(m^2) + \Sigma'_S(m^2) \right] = -\frac{2}{\varepsilon} + \text{endliche Terme}$$

Λ_0 hat eine Singularität für $D = 4$. Der Gesamt-Vertex bis 1-Loop-Ordnung ist also für $p = p'$



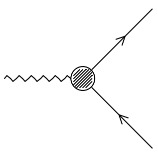
$$= ie(1 + \Lambda_0)\gamma_\mu,$$

wobei Λ_0 der Koeffizient A in der Entwicklung (wegen der Ward-Identität (8.10), s.u.)

$$\Sigma(p) = B + A(\not p - m) + O(\not p - m)^2 \quad \text{mit } 1 - A = Z_e$$

Z_e ist das Residuum des .

Das **Matrix-Element** des Gesamt-Vertex ist endlich, denn



$$\begin{aligned} &= \ldots \overline{u}(p') \Lambda_\mu^{\text{fin}}(p,p') u(p) \\ &\left. \begin{aligned} &+ \overline{u}(p') \Lambda_0 \gamma_\mu u(p) \\ &+ \overline{u}(p') \gamma_\mu u(p) (\sqrt{Z_e})^2 \end{aligned} \right\} \overline{u}(p') \underbrace{\left(\Lambda_0 + Z_e \right)}_{=1} u(p) \end{aligned}$$

Begründung, daß $\Lambda_0 + Z_e = 1$:

Das Residuum des Elektron-Propagators liegt bei $Z_e = 1 - A$. Betrachtet man nun die Ward-Identität (8.10), so folgt

$$\Lambda_\mu(p,p) = \gamma_\mu \Lambda_0(p,p) = \frac{\partial}{\partial p^\mu} \Sigma(p) = A \cdot \gamma_\mu$$

$$\longrightarrow \boxed{\Lambda_0 = A} \qquad \longrightarrow \Lambda_0 + Z_e = \Lambda_0 + 1 + \delta Z_e = 1$$

8.4.2 Vertex bei $p \neq p'$

Man betrachtet den Vertex mit p und p' on-shell, (e^+e^--Streuung bei $q^2 = (p-p')^2 < 0$, e^+e^--Erzeugung/-Vernichtung für $q^2 > 0$). Zur Kovariantenzerlegung von $\Lambda_\mu(p,p')$ benötigt zwei Proportionalitätsfaktoren, die sog. Formfaktoren (wegen der Paritäts-Invarianz treten keine γ_5-Terme).

$$\Lambda_\mu(p,p') = F_1(q^2)\gamma_\mu + F_2(q^2)\frac{(p+p')_\mu}{2m}$$

$$\text{äquivalent: } \Lambda_\mu(p,p') \overset{(7.7)}{=} \underbrace{\big(F_1(q^2)+F_2(q^2)\big)}_{=F_V(q^2)}\gamma_\mu - \frac{i}{2m}\sigma_{\mu\nu}\cdot(p'-p)^\nu \cdot \underbrace{F_2(q^2)}_{F_M(q^2)}$$

Die F_1, F_2 muß man nun aus dieser Gleichung (mittels Kontraktion mit geschickt gewählten Vektoren) ausrechnen (dabei (8.9) benutzen). Wegen (7.13) ist

$$F_2(0) = -\frac{\alpha}{2\pi} \qquad \big(g = 2(1+a)\big), \qquad F_V(q^2) = \underbrace{F_V(0)}_{=\Lambda_0} + \underbrace{F_V(q^2) - F_V(0)}_{=:\widehat{F}_V(q^2)} \tag{8.11}$$

Für $|q^2| \gg m^2$ wird der magnetische Beitrag vernachlässigbar, d.h. es man braucht nur noch den Formfaktor F_V zu beachten.

$|q^2| \ll m^2$: $F_2(q^2) = -\frac{\alpha}{2\pi} + \cdots$

$$\widehat{F}_V(q^2) = \frac{\alpha}{3\pi}\cdot\frac{q^2}{m^2}\left(\log\frac{m}{\lambda} - \frac{3}{8}\right) + \cdots$$

$|q^2| \gg m^2$: $F_2(q^2) \approx 0$

$\underline{q^2 < 0:}$

$$\widehat{F}_V(q^2) = \frac{\alpha}{2\pi}\left\{-\log\left(-\frac{q^2}{\lambda^2}\right)\left[\log\left(-\frac{q^2}{m^2}\right) - 1\right] + \frac{1}{2}\log\left(-\frac{q^2}{m^2}\right) + \frac{1}{2}\log^2\left(-\frac{q^2}{m^2}\right) + \frac{\pi^2}{6} - 2 + O\left(\frac{m^2}{q^2}\right)\right\}$$

$q^2 > 0$: anylytisch fortsetzen in q^2 mit $m^2 - i\varepsilon$, $\lambda^2 - i\varepsilon \longrightarrow mF_V \neq 0$, $q^2 > 4m^2$ oberhalb kinematischer Schwelle (Schnittregeln, wenn kein Prozeß erlaubt)

Zur technischen Berechnung:

$\longrightarrow$ Dirac-Algebra zur Umformung des Zählers benutzen

$$\not{p}u(p) = mu(p), \qquad \overline{u}(p')\not{p}' = m\overline{u}(p')$$

$\longrightarrow$ Tensor-Integrale (vom Type der 3-Pkt-Funktion; bisher wurden explizit nur 2-Pkt-Funktionen bestimmt)

$$C_0, C_\mu, C_{\mu\nu} = \int \frac{1, k_\mu, k_\mu k_\nu}{(k^2-\lambda^2)\big((k-p)^2-m^2\big)\big((k-p')^2-m^2\big)}$$

$\longrightarrow$ algebraische Rückführung auf B-Funktionen und C_0

$$C_\mu = p_\mu C_{11} + p'_\mu C_{12}$$
$$C_{\mu\nu} = p_\mu p_\nu C_{21} + p'_\mu p'_\nu C_{22} + (p_\mu p'_\nu + p_\nu p'_\mu)C_{23} + g_{\mu\nu}C_{24}$$

$\longrightarrow$ Berechnung von C_0 (Übung, viel Spaß)

Anmerkungen

1. Auch nach der Kompensation der $1/\varepsilon$-Divergenzen durch Z_e-Faktoren im Matrixelement, bleibt die Singularität für $\lambda \to 0$ übrig (IR-Singularität, wird später behandelt)

2. Für Fermionen der Ladung Q_f und Masse m_f gilt

$$\Lambda_\mu \to Q_f^2 \Lambda_f(m \to m_f), \quad \Sigma \to Q_f^2 \Sigma(m \to m_f)$$

Die Divergenzen bei der Vertexkorrektur heben sich also wie gesehen gegenseitig auf, übrig bleiben nur die Divergenzen der

- Photon-Selbstenergie $\Pi^\gamma(0) \leftrightarrow \delta Z_\gamma$ und der
- e-Selbstenergie, B-Term: $\Sigma(p) = B + A(\not{p} + m) + \cdots$

$$B = m\big(\Sigma_S(m^2) + \Sigma_V(m^2)\big)$$

Wie man diese Divergenzen beseitigt bzw. umgeht, beschreibt der folgende Abschnitt.

8.5 Renormierung

Der Elektron-Propagator (aufsummiert über die einzelnen Selbstenergien) lautet

$$\frac{i}{\not{p} - m + \Sigma(p)} = \frac{i}{(\not{p} - m)(1 + A) + B + O(\not{p} - m)^2}$$

Der Pol liegt demnach nicht mehr bei $\not{p} - m$. Da aber diese Polstelle laut Källen-Lehmann bei der physikalischen Masse liegen soll ($p^2 = m^2$), muß man bisher einen konzeptionellen Fehler begangen haben.

*Das liegt daran, daß man so naiv war, den Massenbegriff aus der „*Vorschulphysik*“ zu übernehmen!*

Diese Situation erfordert also ein „Umdenken“:

Massenrenormierung

Der Parameter in der Lagrange-Dichte $\mathcal{L}_{\text{QED}}$ ist **nicht** die physikalische Masse, sondern eine formale Größe mit der Dimension einer Masse, die sog. *nackte Masse* m_0. Diese Größe ist unphysikalisch. Man unterscheidet zwei „Renormierungsverfahren“

- additive Renormierung:

$$m_0 = m_R + \delta_m, \quad \delta_m : \textit{Counter-Term}$$

- multiplikative Renormierung

$$m_0 = Z_m \cdot m_R \approx (1 + \delta Z_m) \cdot m_R, \qquad \delta Z_m = \frac{\delta m}{m_R}$$

(dabei bedeutet der Index R „renormiert“.)

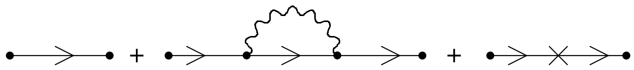
In der Störungsrechnung erhält man in der Bornschen Näherung $m_0 = m_R$, d.h., die renormierte Masse entspricht der physikalischen. Bei Loop-Rechnungen hat man zur renormierten Masse jeweils einen Counter-Term in Abhängigkeit von der Loop-Ordnung zu addieren.

Da die Lagrange-Dichte verändert wurde, ergibt sich eine neue Feynman-Regel (2-Punkt-Vertex)

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = \overline{\psi}\big(i\not{\partial} - (m_R + \delta m)\big)\psi + \cdots = \overline{\psi}\big(i\not{\partial} - m_R\big)\psi - \underbrace{\delta m \overline{\psi}\psi}_{\text{neu}}$$

$\longrightarrow$ $-i\delta m$

Der Propagator (aufsummiert bis 1-Loop) ist somit



$$\frac{i}{\not p - m_R} + \frac{i}{\not p - m_R}\big(i\Sigma(p)\big)\frac{i}{\not p - m_R} + \frac{i}{\not p - m_R}(-i\delta m)\frac{i}{\not p - m_R}$$
$$= \frac{i}{\not p - m_R}\left(1 - \big(i\Sigma(p) - \delta m\big)\frac{1}{\not p - m_R}\right)$$

Entwickelt man dies wie üblich in eine geometrische Reihe oder verwendet gleich $1 - x = \frac{1}{1+x}$ (in 1-Loop-Ordnung), erhält man

$$\longrightarrow \frac{i}{\not p - m_R + \Sigma(p) - \delta m} = \frac{i}{(\not p - m_R)(1+A) + B - \delta m + O(\not p - m)^2}$$

Fordert man nun

$\boxed{\delta m := B}$ *on-shell Massenrenormierungs-Bedingung*

so entspricht die renormierte Masse der physikalischen $m_R = m$, da der Pol des Propagators wieder bei $p^2 = m_R^2 \stackrel{!}{=} m^2$ liegt.

Aus dem Dirac-Propagator kann man nun den Z-Faktor des Elektrons (nach Källen-Lehmann das Residuum des Propagators) bestimmen

$$S = \frac{i}{\not p - m}(1 - A + \text{endlich}) \xrightarrow{\not p \to m} i\frac{1-A}{\not p - m} \stackrel{!}{=} \frac{Z_2}{\not p - m}, \quad \longrightarrow \delta Z_e = -A.$$

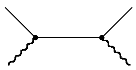
Die Divergenzen in $\delta Z_e = -A$ und $\Lambda_0 = A$ heben sich bei der Berechnung des S-Matrixelements heraus (s. Kap. 8.4.1).

Betrachtet man nun ein beliebiges Matrixelement auf 1-Loop-Niveau mit N_I, der Zahl der inneren und N_A der Zahl der äußeren Fermionlinien (N_A gerade), dann ist die Zahl der Vertices $n = N_i + \frac{N_A}{2}$ und man erhält

$$\left.\begin{array}{ll} \text{von jeder äußeren Linie} & \frac{1}{2}\delta Z_e \text{ aus } \sqrt{Z} \\ \text{von jeder inneren Linie} & \delta Z_e \\ \text{von jedem Vertex} & \Lambda_0 \end{array}\right\} \longrightarrow \text{Divergenz = 0}$$

Beispiel: Compton-Streuung

In der Bornschen Näherung ist die Compton-Streuung durch Abb. 7.4 auf S. 71 gegeben. Die divergenten Anteile in den in Abb. 8.6 abgebildeten Graphen heben sich gegenseitig auf. Übrig bleibt die Divergenz der äußeren Photon-Linie.

 $\cdot \delta Z_\gamma = Born \cdot \left[-\Pi^\gamma(0)\right]$

Diese Divergenz wird mittels der Ladungsrenormierung absorbiert.

8.5.1 Ladungsrenormierung

Die (klassische) Ladung des Elektrons $e = \sqrt{4\pi\alpha}$ mit $\alpha \approx 1/137$, der Feinstrukturkonstante ist z.B. via Thomson-WQ meßbar

$$\sigma_{\text{Th}} \sim e^2 \left(\frac{e}{m}\right)^2$$

(e/m mißt man auf anderem Wege, etwa durch Messungen von Krümmungsradien im Magnetfeld).

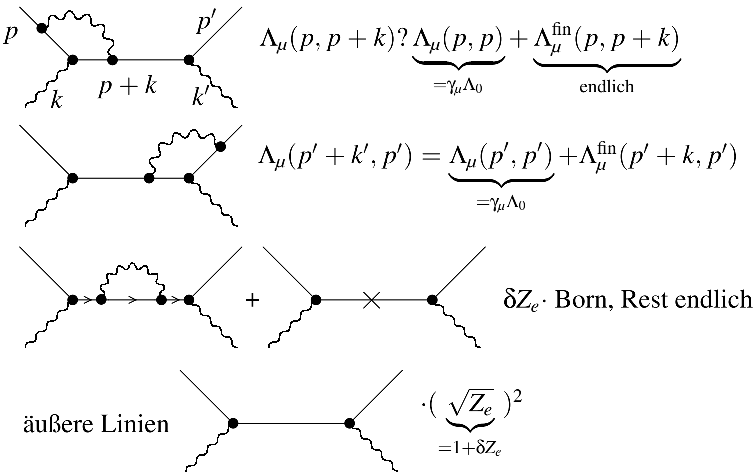
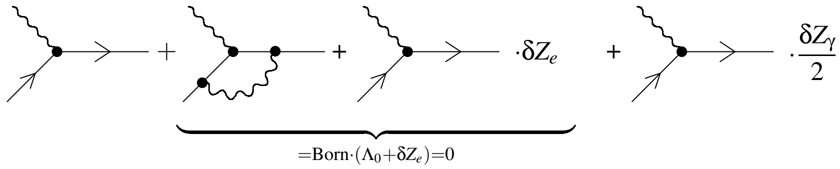


Abbildung 8.6: Die Divergenzen in den angeführten Graphen heben sich gegenseitig heraus (nach Massenrenormierung).

Der Thompson-WQ ist der Grenzfall $\omega\to 0$ des Compton-WQ

$$\sigma_{\text{Compton}}\xrightarrow{\omega\to 0}\sigma_{\text{Thomson}}$$

Betrachtet man nur die Bornsche Näherung, stellt man fest, daß aus $ie\gamma_\mu$ die elektrische Ladung e folgt. Nimmt man jedoch zusätzlich das 1-Loop-Niveau hinzu, erhält man



Die übriggebliebenen Terme lauten ausgeschrieben (f. $p\to p'$ d.h. $q\to 0$, Thomson-Limes)

$$\bar{u}(p)ie\gamma_\mu\left(1+\frac{1}{2}\delta Z_\gamma\right)u(p)=\bar{u}(p)ie\gamma_\mu\left(1-\frac{1}{2}\Pi^\gamma(0)\right)u(p)$$

$$\text{d.h.:}\quad e\to e\left(1-\frac{1}{2}\Pi^\gamma(0)\right)$$

Folgerungen

Der Parameter e in der Lagrange-Dichte $\mathcal{L}_{\text{QED}}$ ist **nicht** die physikalische Ladung des Elektrons, sondern eine formale (unphysikalische) Größe, die nackte Ladung e_0.

- Additive Renormierung

$$\boxed{e_0=e_R+\delta e}\qquad \delta_e:\ \text{Counter-Term}$$

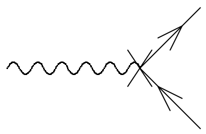
- Multiplikative Renormierung

$$e_0=\tilde{Z}_2\cdot e_R=(1+\delta\tilde{Z}_e)\cdot e_R,\ \delta\tilde{Z}_e=\frac{\delta e}{e_R}$$

In der Lagrange-Dichte wird also die Ladung durch die nackte Ladung e_0 ersetzt, was wiederum zu einem neuen Vertex führt

$$e_0\overline{\psi}\gamma_\mu\psi A^\mu = e_R\overline{\psi}\gamma_\mu\psi A^\mu + \delta e\overline{\psi}\psi A^\mu$$

$\longrightarrow$ neuer Vertex



$i\delta e\gamma_\mu$

In Bornsche Näherung ist $\delta e = 0$, in den höheren entsprechend $\delta e = \sum_i \delta^{(i)}$, wobei $\delta^{(i)}$ von der Ordnung α^i ist.

Zählt man nun zu dem „normalen" Vertex den Counter-Term hinzu, erhält man für $\omega \to 0$

$$\underbrace{\overline{u}(p')ie_R\gamma_\mu u(p)}_{\longrightarrow \text{ liefert } \sigma_{\text{Th}}\sim\frac{e^4}{m^2}} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2}\Pi^\gamma(0) + \frac{\delta e}{e}\right)}_{=1, \text{ wenn } \boxed{\frac{\delta e}{e} = \frac{1}{2}\Pi^\gamma(0)}}$$

Die Formel in dem Kästchen ist die *on-shell Ladungsrenormierungs-Bedingung*. Das bedeutet hier, daß, sofern diese Bedingung erfüllt ist, die renormierte Ladung e_R der physikalischen Ladung e entspricht ($e = e_R$). (on-shell bedeutet in diesem Zusammenhang, daß die äußeren Impulse on-shell sind.)

Summiert man nun alle Graphen (die normalen und die renormierten) auf, erhält man Abb. 8.7.

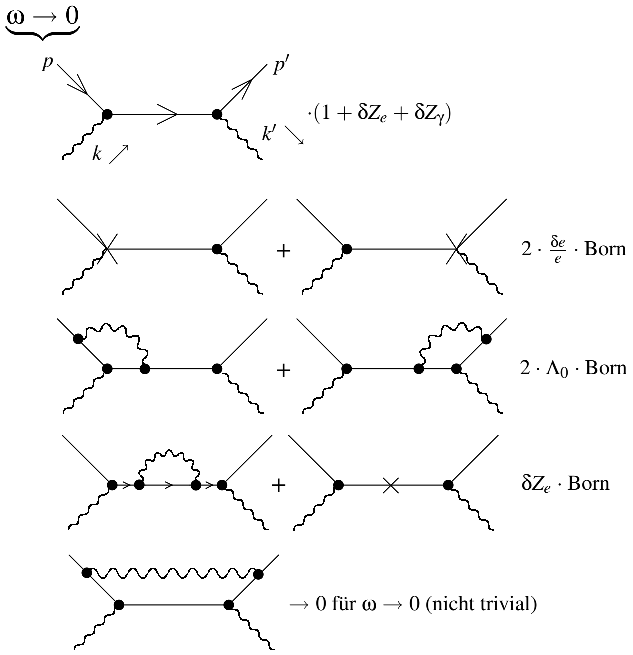


Abbildung 8.7: Zum Compton-Thomson-WQ

Daraus folgt, daß die 1-Loop-Compton-Amplitude für $\omega \to 0$ in die Born-Amplitude und damit der Compton-WQ in den Thomson-WQ übergeht.

Es gibt ein Theorem, was eben dies besagt (von Jauch und Rohrlich):

> Der Compton-WQ geht im klassischen Limes $\omega \to 0$ in den Thomson-WQ über (und zwar in jeder Ordnung), sofern die on-shell-Ladungsrenormierungs-Bedingung erfüllt ist.

Daraus folgt, daß die Quantenelektrodynamik einen klassischen Limes (klassische E-Dynamik, Maxwell-Gleichungen) hat.

Anmerkungen

1. Der Wert von e ist unabhängig von der Ordnung der Störungstheorie (Theorem von Jauch und Rohrlich).
2. e ist universell, da $\delta e/e = \frac{1}{2}\Pi^\gamma(0)$ nur abhängig vom Photon[8].

Durch die Einführung der Counter-Terme $\delta e, \delta m$ sind alle S-Matrix-Elemente S_{fi} in 1-Loop-Ordnung endlich für $D \to 4$.

Für die Fermion- und Vertex-Beiträge wurde oben bereits die „Cancellierung" der Divergenzen gezeigt. Für die Photon-Beiträge folgt nun, da jede äußere Photon-Linie an einem Vertex und jede innere an zwei Vertices endet

$$\text{äußere Linie:} \quad \sqrt{Z_\gamma} \approx \left(1 + \frac{1}{2}\delta Z_\gamma + \frac{\delta e}{e}\right) \cdot \text{Born} = 1 \cdot \text{Born}$$

$$\text{innere Linie:} \quad \left(1 + \delta Z_\gamma + 2\frac{\delta e}{e}\right) \cdot \text{Born} = 1 \cdot \text{Born}$$

8.5.2 Feldrenormierung

Nach Durchführung der Parameterrenormierung (m, e) sind die S-Matrix-Elemente S_{fi} endlich. Die Propagatoren selbst, die Vertices höherer Ordnung und die Selbstenergien sind jedoch noch immer divergent.

$$\Sigma^e(p) - \delta m = A(\not p - m) + (\text{endlich})$$
$$\Sigma^\gamma(q^2) = q^2\big(\Pi^\gamma(0) + \widehat{\Pi}^\gamma(q^2)\big).$$

A und $\Pi^\gamma(0)$ beinhalten die divergenten Anteile. Die Divergenzen sind proportional zu $\not p$ bzw. q^2. Es müssen also weitere Counter-Terme eingeführt werden, die die Divergenzen absorbieren

$$\Sigma^e(p) - \delta m + \delta Z_2^e(\not p - m) = \big(A + \delta Z_2^e\big)(\not p - m) + (\text{endliche Terme})$$

und

$$\Sigma^\gamma(q^2) + \delta Z_2^\gamma = q^2\big(\Pi^\gamma(0) + \delta Z_2^\gamma + \widehat{\Pi}^\gamma(q^2)\big).$$

Diese Terme folgen aus folgender Modifikation der Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} \to \mathcal{L} + \delta Z_2^e \overline{\psi}(i\not\partial - m)\psi + \delta Z_2^\gamma(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})$$

Die Bedeutung dieser neuen Faktoren ergibt sich aus neuen Z-Faktoren, $1 + \delta Z_2^e =: Z_2^e$, $\quad 1 + \delta Z_2^\gamma =: Z_2^\gamma$, welche demnach wie folgt in der Laagrange-Dichte vorkommen

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} \to \mathcal{L}_{\text{QED}} = \cdot Z_2^e \overline{\psi}(i\not\partial - m_0)\psi - \frac{1}{4}Z_2^\gamma F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \cdots$$

Das entspricht der multiplikativen Feldrenormierung

$$\psi \to \sqrt{Z_2^e}\psi, \qquad A_\mu \to \sqrt{Z_2^\gamma}A_\mu$$

[8]Wegen der Ward-Identität

$$\frac{\partial}{\partial p^\mu}\Sigma(p) = \Lambda_0(p,p)$$

folgt $\Lambda_0 = A$. Berechnet man nun wieder den Vertex mit allen Korrekturen, erhält man, da sich die Λ_0 und δZ_e-Terme gegenseitig wegheben, daß $\frac{\delta e}{e} = -\frac{1}{2}\delta Z^\gamma$. Da das aber nur vom Photon-Propagator abhängt, ist die Ladung „universell".

Eine andere Interpretation besagt, daß die Felder in $\mathcal{L}_{\text{QED}}$ „nackte Felder“ (A^0_μ, ψ^0) sind mit

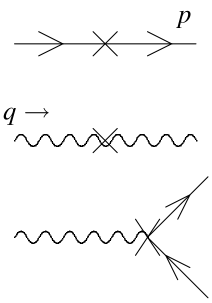
$$\psi^0 = \sqrt{Z_2^e}\psi_R, \qquad A^0_\mu \to \sqrt{Z_2^\gamma} A_{\mu,R}$$

(Index R bedeutet „renormiertes Feld“.)

Das Rezept zur Behandlung von „allen“ Divergenzen ist die Aufstellung einer Lagrange-Dichte mit „nackten“ Größen (aus der dann auch die Massen- und Ladungsrenormierung wieder folgt) außer im Eichfixierungs-Term ($\sim \xi q^\mu q^\nu$), der erst *nach* der Renormierung hinzugezählt wird [9].

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = \mathcal{L}_{\text{QED}}(e_0, m_0, \psi^0, A^0_\mu)$$

Entwickelt man das bis zum 1-Loop-Niveau, erhält man die „neuen“ in Abb. 8.8 dargestellten 1-Loop-



$$i\left(-\delta m + \delta Z_2^e \cdot (\not p - m)\right)$$

$$i\left(-g^{\mu\nu} q^2 + q^\mu q^\nu\right) \cdot \delta Z_2^\gamma$$

$$ie\gamma_\mu \underbrace{\left(\frac{\delta e}{e} + \delta Z_2^e + \frac{1}{2}\delta Z_2^\gamma\right)}_{=:\delta Z_1}$$

Abbildung 8.8: 1-Loop-Feynman-Regeln (Counter-Terme) nach Massen-, Ladungs- und Feldrenormierung

Feynman-Regeln (Counter-Terme). Demnach ist

$$e_0 Z_2^e \sqrt{Z_2^\gamma} =: e Z_1. \tag{8.12}$$

Der Faktor Z_1 ist dabei so definiert, daß er die komplette Vertex-Renormierung (Renormierung der Felder am Vertex und Ladungsrenormierung) enthält.

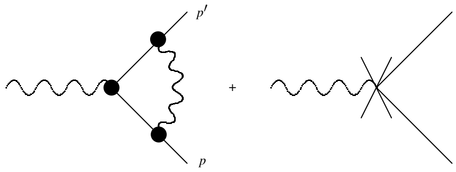
Die renormierten Selbstenergien lauten nun

$$\Sigma_R^e(p) = \Sigma(p) - \delta m + \delta Z_2(\not p - m) = \underbrace{(A + \delta Z_2^e)}_{=0 \text{ f. } \boxed{\delta Z_2^e = -A}} \cdot (\not p - m) + \cdots \tag{8.13}$$

$$\begin{aligned}\Sigma_R^\gamma(q^2) &= q^2\left(\Pi^\gamma(0) + \delta Z_2^\gamma + \widehat{\Pi}^\gamma(q^2)\right)\\ &= q^2 \widehat{\Pi}^\gamma(q^2), \quad \text{wenn } \boxed{\delta Z_2^\gamma = -\Pi^\gamma(0)}\end{aligned} \tag{8.14}$$

Es handelt sich bei den Kästchen wieder um on-shell-Renormierungsbedingungen, d.h., die Propagatoren verhalten sich in der Nähe der Massenschale wie freie Propagatoren

Die renormierten Vertexkorrekturen lauten somit



$$\underbrace{\Lambda_\mu^{\text{fin}}(p, p')}_{\text{endlich}} + \gamma_\mu \underbrace{\left(\frac{\delta e}{e} + \delta Z_2^e + \frac{1}{2}\delta Z_2^\gamma\right)}_{=\delta Z_2^e}$$

$$\Lambda_\mu(p, p) + \gamma_\mu \delta Z_2^e = 0$$

Mit diesem Ergebnis folgt, daß jede 1-Loop-Green-Funktion endlich ist.

[9] wegen einer Ward-Identität

Die renormierten Propagatoren sind

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\not p - m}\left(1-\Sigma_R\frac{1}{\not p - m}\right) \xrightarrow{\not p\to m} \frac{1}{\not p - m}\big(1+\underbrace{\not p - m}_{\to 0}+\cdots\big) \quad \text{Res=1}\\
&\frac{1}{q^2}\Big(1-\underbrace{\widehat{\Pi}^\gamma(q^2)}_{\equiv\Pi_R}\Big) \xrightarrow{q^2\to 0} \frac{1}{q^2} \quad \text{Res=1}
\end{aligned}
$$

Damit kann man als Regel für die on-shell-Renormierung festhalten, daß keine $\sqrt{Z}$-Faktoren an die äußeren Linien in S_{fi} zu schreiben sind (da diese die Counter-Terme zu den inneren Linien und Vertices annullieren).

Es folgt ein **<u>Satz</u>**:

> Die Feldrenormierung ändert die physikalischen S-Matrix-Elemente nicht, egal, wie die Z_2 festgelegt sind.

Zur Begündung betrachtet man ein 1-komponentiges Skalarfeld $\phi(x)$

$$
\begin{aligned}
\phi^0(x) &= \sqrt{Z_2}\phi_R(x) \qquad \text{Feldrenormierung}\\
\lim_{t\to\mp\infty}\phi^0(x) &= \sqrt{Z_\phi}\phi_{\substack{\text{in}\\\text{out}}}(x) \qquad \text{schwacher Asymptotenlimes}\\
\longrightarrow \lim_{t\to\mp\infty}\phi_R(x) &= \sqrt{\frac{Z_\phi}{Z_2}}\cdot\phi_{\substack{\text{in}\\\text{out}}}(x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tau_n(x_1,\ldots,x_n) &= \langle 0|T\phi^0(x_1)\cdots\phi^0(x_n)|0\rangle\\
\tau_{n,R}(x_1,\ldots,x_n) &= \langle 0|T\phi_R(x_1)\cdot\phi_R(x_n)|0\rangle = \big(Z_2\big)^{-n/2}\tau_n(x_1,\ldots,x_n)
\end{aligned}
$$

Fourier-Transformation liefert die renormierte n-Punkt-Funktion im Impulsraum in Abhängigkeit von der „normalen“

$$
\tau_{n,R}(q_1,\ldots,q_n) = \big(Z_2\big)^{-n/2}\tau_n(q_1,\ldots,q_n) \tag{8.15}
$$

Das S-Matrix-Element ergibt sich via LSZ-Theorem zu

$$
\begin{aligned}
S_{fi}^{(0)} &= \Big(\tau_n(q_1,\ldots,q_n)(q_1^2-m^2)\cdots(q_n^2-m^2)\Big)_{\text{on-shell}}\cdot\big(\text{WF}\big)^n\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{Z_\phi}}\right)\\
S_{fi}^{(R)} &= \left(\sqrt{\frac{Z_2}{Z_\phi}}\right)^n\big(\text{WF}\big)^n\Big(\tau_{n,R}(q_1,\ldots,q_n)(q_1^2-m^2)\cdots(q_n^2-m^2)\Big)_{\text{on-shell}}\\
\longrightarrow S_{fi}^{(0)} &= S_{fi}^{(R)} \qquad \text{(unter Benutzung von (8.15)).}
\end{aligned}
$$

Als Konsequenz dieser Gleichheit kann man immer $Z_2 = Z_\phi$ wählen, d.h. im S-Matrix-Element tritt kein $\sqrt{Z}$-Faktor mehr auf.

Bilanz:

- Bei der Feldrenormierung bleibt die Physik unverändert.
- Bei der Parameter-Normierung (m, e) ist die Zahl der Parameter fest, d.h., man benötigt in den höheren Ordnungen keine zusätzlichen Parameter, die Vorhersagekraft bleibt erhalten.

8.6 Andere Renormierungsschemata

Die Minimalforderung, die man an ein Renomrierungsschema stellen muß, ist die Absorbierung der Divergenzen durch Counter-Terme und die Verfügbarkeit über die endlichen Terme, aus denen die eigentliche Physik besteht.

Je nachdem, wie man renormiert, erhält man eine andere Bedeutung der Parameter (s. Massen- bzw. Ladungsrenormierung). Betrachtet man z.B. die renormierte Selbstenergie (s. (8.14))

$$\Sigma_R^\gamma(q^2) = q^2 \cdot \left(\Pi^\gamma(q^2) + \delta Z_2^\gamma\right) = q^2 \left\{ \frac{\alpha}{3\pi} \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \log 4\pi - \log \frac{m^2}{\mu^2} + \delta Z_2^\gamma + \widehat{\Pi}^\gamma(q^2) \right) \right\},$$

so gibt es zwei Möglichkeiten, die besonders hervorzuheben sind.

- Minimal Subtraction (MS-Schema)

$$\delta\Sigma_2^\gamma = -\frac{2}{3}\frac{\alpha}{\pi} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \longrightarrow \Sigma_{\mathrm{MS}}^\gamma(q^2, \mu)$$

- Modified MS ($\overline{\mathrm{MS}}$-Schema)

$$\delta\Sigma_2^\gamma = -\frac{\alpha}{3\pi}\left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \log 4\pi\right) \longrightarrow \Sigma_{\overline{\mathrm{MS}}}^\gamma(q^2, \mu)$$

Die Parameter kann man willkürlich aufteilen

$$m_0 = m_R + \delta m_R \qquad e_0 = e_R + \delta e_R.$$

Dann sind die m_R und e_R durch Meßvorschriften festzulegen (z.B. durch Messen zweier Observablen, die von m_R, e_R abhängen. Die gefundenen m_R und e_R in Abhängigkeit von m und e auszudrücken bzw. umgekehrt ist in jeder Ordnung möglich (Übung).

8.7 Ward-Identitäten

Aus vorhandenen Symmetrien (Eichsymmetrien) folgen Relationen zwischen Green-Funktionen. Diesbezüglich kann man in der QED zwei Wege beschreiten

1. erhaltener Strom $\partial_\mu J^\mu_{\mathrm{e.m.}} = 0 \longrightarrow$ W.I. (Ausnutzung der Invarianz unter globaler $U(1)$-Transf. $\psi \to e^{i\alpha}\psi, \alpha = const \in \mathbb{R}$)
2. BRS-Symmetrie $\longrightarrow$ W.I. (lokale $U(1)$: $\psi \to e^{i\alpha(x)}\psi$ und $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu\lambda$) verallgemeinerbar auf nichtabelsche Symmetrie.

8.7.1 BRS-Symmetrie

(nach Becchi, Rouet, Stora). Die QED-Lagrange-Dichte kann man aufspalten in einen Teil für die Eichfixierung und den Rest

$$\mathcal{L}_{\mathrm{QED}} = \underbrace{\overline{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m + eA\!\!\!/)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}}_{=\mathcal{L}_1} \underbrace{-\frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2}_{=\mathcal{L}_{\mathrm{fix}}}$$

$\mathcal{L}_1$ ist invariant unter lokalen Eichtransformationen $U(1)$

$$\psi(x) \to \psi(x) \cdot e^{i\alpha(x)} \qquad A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \partial_\mu\alpha(x), \qquad \alpha(x): \text{ Skalar}$$

Die infinitesimalen Transformationen $\left(\alpha(x) = \theta w(x), O(\theta)^2 \approx 0\right)$ lauten

$$\psi \to (1 + ie\theta w(x))\psi = \psi + \delta\psi \qquad A_\mu \to A_\mu + \theta\partial_\mu w(x) = A_\mu + \delta A_\mu$$

In der erweiterten Lagrange-Dichte addiert man nun einen weiteren Term hinzu, der die Physik jedoch unverändert läßt.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu w)(\partial^\mu w)$$

$w(x)$ ist ein neutrales Skalarfeld mit Masse=0. Man baut also eine weitere dynamische Variable ein, welche ein formales Hilfsfeld darstellt. Die Bezeichung lautet *Geistfeld*. Dieses Geistfeld hat keine WW, daher beschreibt $\mathcal{L}$ das gleiche phys. System.

BRS-Transformation

Unter einer BRS-Transformation versteht man folgendes: neben der „normalen" Symmetrietransformation $U(1)$ wird noch das Geistfeld transformiert

$$\boxed{\begin{array}{l}\psi \to \psi + \delta\psi, \quad A_\mu \to A_\mu + \delta A_\mu, \quad w \to w + \delta w \\ \delta\psi = ie\theta w(x), \; \delta A_\mu = \theta\partial_\mu w(x), \; \delta w := -\frac{1}{\xi}(\partial_\mu A^\mu)\theta\end{array}}. \tag{8.16}$$

Unter dieser Transformation ist $\mathcal{L}$ bzw. $S = \int \mathrm{d}^4x\,\mathcal{L}$ invariant. (Beachte dabei $\int \partial_\mu(\partial_\nu A^\nu)(\partial^\mu w) = -\int(\partial_\nu A^\nu)(\Box w)$

Es folgt, daß die Greenschen Funktionen $\langle 0|T\ldots\psi\ldots\overline{\psi}\ldots A_\mu\ldots w\ldots|0\rangle$ ebenfalls invariant sind, d.h.

$$\boxed{\delta\langle 0|T\ldots\psi\ldots\overline{\psi}\ldots A_\mu\ldots w\ldots|0\rangle = 0} \qquad \text{Ward-Identität.}$$

Von besonderer Bedeutung sind der Photon- und Fermion-Propagator und der Vertex

1. Photon-Propagator

$$\begin{aligned}0 &\overset{!}{=} \delta\langle 0|TA_\mu(x)w(y)|0\rangle \overset{(8.16)}{=} \theta\langle 0|T\partial_\mu^{(x)}w(x)w(y)|0\rangle - \frac{1}{\xi}\theta\langle 0|TA_\mu(x)\partial_\nu^{(y)}A^\nu(y)|0\rangle \\ &= \partial_\mu^{(x)}\underbrace{\langle 0|Tw(x)w(y)|0\rangle}_{=iD(x-y)}\theta - \frac{1}{\xi}\partial_\nu^{(y)}\underbrace{\langle 0|A_\mu(x)A^\nu(x)|0\rangle}_{=iD_\mu{}^\nu(x-y)}\theta\end{aligned}$$

$D(x-y)$ ist der freie skalare Propagator (hier für masseloses w-Feld), $D_{\mu\nu}(x-y)$ der freie Propagator für Vektorfelder. Man hat also

$$\longrightarrow \partial_\mu^x D(x-y) - \frac{1}{\xi}\partial_\nu^y D_{\mu\nu}(x-y) = 0,$$

woraus durch Fouriertransformation im Impulsraum folgendes wird

$$-\frac{iq_\mu}{q^2} - \frac{1}{\xi}iq^\nu D_{\mu\nu}(q) = 0 \quad \longrightarrow \boxed{q^\nu D_{\mu\nu} = -\xi\frac{q^\mu}{q^2}},$$

das bezeichnet man als *Transversalitätsbedingung des Photon-Propagators* (obwohl sich daraus eigentlich die Transversalität der Photon-Selbstenergie ergibt). Mit dem Ansatz $D_{\mu\nu} = A(q)g_{\mu\nu} + B(q)q_\mu q_\nu$ geht man in diese Gleichung ein und erhält

$$D_{\mu\nu} = \underbrace{\left(-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right)f(q^2)}_{=:D^T_{\mu\nu}\ \text{T: transversal}} - \xi\frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \tag{8.17}$$

Der hintere Term ergibt sich aus der Eichfixierung und ist bereits in niedrigster Ordnung vorhanden. Der vollständige Propagator via Störungstheorie berechnet, lautet

$$D_{\mu\nu} = \left(-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right)\frac{1}{q^2}\frac{1}{1+\Pi(q^2)} - \xi\frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \tag{8.18}$$

Die Selbstenergie ist dabei

$$\Sigma_{\mu\nu} = (-g_{\mu\nu}q^2 + q_\mu q_\nu)\Pi(q^2),$$

d.h., der Counter-Term aus der Feldrenormierung

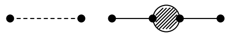
$$(-g_{\mu\nu}q^2 + q_\mu q_\nu)(Z_2^\gamma - 1)$$

wird nur benötigt, um $\mathcal{L}_1$ zu kompensieren, d.h. man benötigt **keine Feldrenormierung in** $\mathcal{L}_{\text{fix}}$.

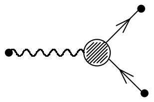
Der Eichfixierungsterm ist bereits in der niedrigsten Ordnung (8.17) vorhanden und in den höheren Ordnungen kommen nur noch transversale Terme hinzu (8.18). Daher kann $\mathcal{L}_{\text{fix}}$ nicht zur Renormierung beitragen (da in Born-Ordnung nicht renormiert wird).

2. Vertex und Fermion-Propagator

$$\begin{aligned}
&\delta\langle 0|T\psi(x)\overline{\psi}(y)w(z)|0\rangle \overset{!}{=} 0\\
&= ie\langle 0|Tw(x)\psi(x)\overline{\psi}(y)w(z)|0\rangle - ie\langle 0|T\psi(x)\overline{\psi}(y)w(y)w(z)|0\rangle - \frac{1}{\xi}\langle 0|T\psi(x)\overline{\psi}(y)\partial_\mu A^\mu(z)|0\rangle\\
&= ie\langle 0|Tw(x)w(z)|0\rangle\langle 0|\psi(x)\overline{\psi}(y)|0\rangle
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&- ie\langle 0|Tw(y)w(z)|0\rangle\langle 0|T\psi(x)\overline{\psi}(y)|0\rangle\\
&- \frac{1}{\xi}\partial_\mu^z \tau_3^\mu(x,y,z)
\end{aligned}$$



Die einzelnen Graphen ergeben ausgerechnet

$$\int d^4x d^4y d^4z D(x-z)S(x-y)\cdot e^{i(px-qy-kz)} = (2\pi)^4\delta^{(4)}(p-q+k)D(k)S(p+k)$$

$$\int d^4x d^4y d^4z D(y-z)S(x-y)e^{i(px-qy+kz)} = (2\pi)^4\delta^{(4)}(p-k+q)D(k)S(p)$$

$$\tau_3^\mu(x,y,z) = \int \frac{d^4p'}{(2\pi)^4}\frac{d^4q'}{(2\pi)^4}\frac{d^4k'}{(2\pi)^4} e^{ip'x-1'y+k'z}\cdot\delta^4(p'-q'+k')\tau_3^\mu(p',q',k')$$

Beachte $\partial_\mu^{(z)}\tau_3^\mu \to ik'_\mu$, so daß

$$\int d^4x \int d^4y \int d^4z\, e^{i(px-qy+kz)}\partial_\mu^{(z)}\tau_3(x,y,z) = (2\pi)^4\delta^4(p-q+k)(-ik_\mu)\tau_3^\mu(p,q,k).$$

Damit wird

$$\longrightarrow \boxed{D(k)\left[S(p+k)-S(p)\right] = \frac{1}{\xi}k_\mu\tau_3^\mu(p,q,k)}_{p+k=q}$$

Es ist

$$\tau_3^\mu(p,q,k) = iD^{\mu\nu}(k)iS(p+k)i\Gamma_\nu iS(p) \quad \text{mit } i\Gamma_\nu = ie(\gamma_\nu+\Lambda_\nu)$$

$$k_\mu\tau_3^\mu \sim k_\mu D^{\mu\nu} = -\xi\frac{k^\nu}{k^2} \quad \longrightarrow D(k) = \frac{1}{k^2\ldots}$$

Betrachte

$$S(p+k) - S(p) = -k^\nu S(p+k)(\gamma_\nu+\Lambda_\nu)S(p)$$

Multipliziert man diese Gleichung von links mit $S^{-1}(p+k)$ und von rechts mit $S^{-1}(p)$, erhält man

$$\longrightarrow \boxed{S^{-1}(p+k) - S^{-1}(p) = k^\nu(\gamma_\nu+\Lambda_\nu) = k^\nu\Gamma_\nu} \qquad \text{Ward-Identität.}$$

Es ist $S^{-1}(p) = \not{p} - m + \Sigma(p)$, so daß man obige Gleichung leicht ersetzen kann

$$\longrightarrow \boxed{\Sigma(p+k) - \Sigma(p) = k^\nu \Lambda_\nu} \tag{8.19}$$

$$\xrightarrow{k\to 0} \Lambda_\nu(p,p) = \frac{\partial \Sigma}{\partial p^\nu} \qquad \big(\text{vgl. S. 94, Gl. (8.10)}\big). \tag{8.20}$$

Bisher waren alle Felder unrenormierte Felder und damit die Ward-Identitäten unrenormierte Ward-Identitäten. Die renormierten Ward-Identitäten ergeben sich durch die Einsetzung der nackten Größen in die Lagrange-Dichte

$$\psi \to \sqrt{Z_2^e}\psi, \qquad A_\mu \to \sqrt{Z_2^\gamma} A_\mu, \quad e_0, m_0$$

Setzt man dies alles in die Lagrange-Dichte ein, erhält man

$$\mathcal{L} = Z_2^e \underbrace{\overline{\psi}\Big(i\not{\partial} - m_0 + e\frac{Z_1}{Z_2^e}\not{A}\Big)\psi - Z_2^\gamma \frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}}_{\text{lokal } U(1)-\text{eichinv. f. } e\to e\frac{Z_1}{Z_2^e}} \underbrace{\overbrace{-\frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2}^{\text{nicht renormieren}} + \frac{1}{2}(\partial_\mu w)(\partial^\mu w)}_{\text{BRS}-\text{invariant}}$$

Beachte: statt einem $e_0 \cdot \sqrt{Z_2^\gamma}$ steht in obiger Gleichung wegen (8.12) der Faktor $e\frac{Z_1}{Z_2^e}$.
Damit erhält man die „renormierte“ BRS-Transformation und die renormierten Ward-Identitäten

$$\delta\psi = i\left(e\frac{Z_1}{Z_2}\right)\theta w \psi, \qquad \delta A_\mu = \theta \partial_\mu w, \qquad \delta w = -\frac{1}{\xi}(\partial_\mu A^\mu)\theta$$

$$\longrightarrow \boxed{e\frac{Z_1}{Z_2^e}\Big(S_R^{-1}(p+k) - S_R^{-1}(p)\Big) = k^\mu \Gamma_\mu^R}.$$

$\Gamma_\mu^R = \Gamma_\mu \cdot Z_1, \quad S_R^{-1}(p) = \not{p} - m + \Sigma_R(p)$. Weiter ergibt sich

$$Z_1 = Z_2^e \longrightarrow e_0 = e\sqrt{Z_2^\gamma},$$

Zu Begründung betrachte man

$$S_R^{-1}(p) = \not{p} - m + c(\not{p} - m)^2 + \cdots$$

$$Z_1(\gamma_\mu + \Lambda_\mu) = \gamma_\mu + \underbrace{\Lambda_\mu^{\text{fin}}(p+k,p)}_{\overset{\text{on-shell}}{=}0} + \underbrace{\frac{F_2}{2m}\sigma_{\mu\nu}k^\nu}_{k^\mu\cdot(\dots)=0}$$

$$\Lambda_\mu^{\text{fin}}(k^2) = \frac{\gamma_\mu \Lambda(k^2) + \cdots}{\Lambda(k^2)} \xrightarrow{k\to 0} 0$$

$$e\cdot \frac{Z_1}{Z_2^e}(\not{k} + ck^2) = e\big(\not{k} + \not{k}\Lambda(k^2)\big) \iff \boxed{Z_1 = Z_2^e},$$

d.h., die Ladungsrenormierung ist universell durch die Vakuum-Polarisation festgelegt.

Anmerkung

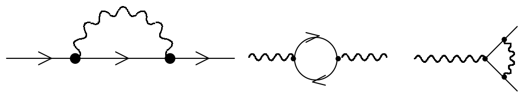
Die Ward-Identitäten folgen auch aus der Stromerhaltung $\partial_\mu j^\mu_{\text{e.m.}} = 0$ (entsprechend einer globalen $U(1)$-Symmetrie) und gelten auch für $m_\gamma \neq 0$, d.h., wenn $U(1)$-Symmetrie vorliegt, ist die Theorie renormierbar auch bei massiven Vektorbosonen. Gilt aber nicht mehr bei nichtabelschen Theorien.

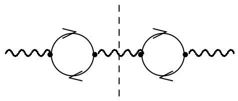
8.8 allg. Betrachtungen z. Renormierbarkeit

Gegeben sei eine Lagrange-Dichte $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, m, g)$, wobei ϕ Feld(er) sein soll(en), m Masse(n) und g Kopplung(en).

1-PI Vertex-Funktionen

(1-PI: one-particle-irreducible). Es handelt sich dabei um amputierte, zusammenhängende Green-Funktionen, die nicht zerlegbar sind durch Zerschneiden *einer* Linie z.B.


sind 1-PI


nicht 1-PI

Die Divergenzen treten auf in den 1-PI-Diagrammen, man hat zwei Schritte (evtl. wiederholt) zu tun

1. Schritt Isolierung der Divergenzen in 1-Loop in den 1-PI-Vertexfunktionen. $\longrightarrow$ Addition eines Satzes von Counter-Termen, der die Divergenzen absorbiert.

   $$\mathcal{L} \to \mathcal{L} + \Delta\mathcal{L}_{(1)} \equiv \mathcal{L}_{(1)}$$

2. Schritt Ausgehend von $\mathcal{L}_{(1)} \longrightarrow$ Isolierung der Divergenzen in 1-pI auf 2-Loop Niveau. Addition eines neuen Satzes von Counter-Termen

   $$\mathcal{L}_{(1)} \to \mathcal{L}_{(1)} + \Delta\mathcal{L}_{(2)}$$

$\vdots$
iteriert

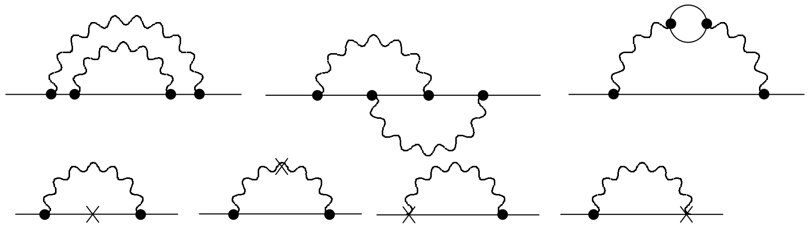
Auf die Frage, wann eine Theorie renormierbar ist, lautet die Antwort, wenn die Zahl der verschiedenen Typen von Counter-Termen beschränkt ist.

Es gilt (nach Bogoliubov und Zimmermann)

> Bei den 1-PI-n-Punkt-Funktionen in l-Loop-Ordnung, die sich aus der Lagrange-Dichte
>
> $$\mathcal{L}_{(l-1)} = \mathcal{L} + \Delta\mathcal{L}_{(1)} + \cdots + \mathcal{L}_{(l-1)}$$
>
> ergeben, ist der divergente Anteil ein Polynom in den äußeren Impulsen.

Das liegt daran, daß die in den n-Punkt-Funktionen auftretenden Zeitordnungen ($\longrightarrow$ Θ-Funktionen) für gleiche Zeiten diivergieren „und daher" proportional zur Ableitung der Delta-Funktion geschrieben werden können. Fouriertransformiert man diese Terme, ergeben sich Impuls-Polynome ...

Beispiel:



$$= \frac{a_0}{\varepsilon^2} + \frac{b_0}{\varepsilon} + \not{p}\left(\frac{a_1}{\varepsilon^2} + \frac{b_1}{\varepsilon^2}\right) + \text{endlicheTerme}.$$

Oberflächlicher Divergenzgrad d

Es gebe L Schleifen, d.h. L Integrations-Impulse $L \int \mathrm{d}^4 q$
I_B sei die Zahl der inneren Bosonlinien $I_B \cdot \frac{1}{q^2}$
I_F sei die Zahl der inneren Fermionlinien $I_F \cdot \frac{1}{q}$

$$\text{Oberflächlicher Divergenzgrad} \longrightarrow \boxed{d = 4 \cdot L - 2 \cdot I_B - I_F}$$

d sagt allerdings nichts über das tatsächliche Divergenzverhalten aus. Es gibt jedoch ein Theorem von Weinberg, welches besagt

> Ein Diagramm ist konvergent, wenn $d < 0$ für des Gesamt-Diagramm und $d < 0$ für jedes Unterdiagramm

(Die Unterdiagramme ergeben sich dabei aus dem urpsrünglichen durch „Festhalten" eines oder mehrerer Impulse.)

Die Umkehrung besagt also, wenn nur für ein Unterdiagramm $d \geqslant 0$ gilt, so ist das gesamt Diagramm divergent.

Primitiv divergentes Diagramm

d.h., für alle Unterdiagramme ist $d < 0$, aber fürs gesamte Diagramm ist $d \geqslant 0$

Wenn also eine Theorie in $(L-1)$-Ordnung endlich ist (d.h, alle 1-PI-Vertexfunktionen sind endlich), dann sind die Divergenzen in L-Ordnung primitive Divergenzen und es sind nur endlich viele Counter-Terme notwendig, wenn die Zahl der primitiven Divergenzen beschränkt ist.

Eine Theorie, die nur endlich viele primitive Divergenzen aufweist bezeichnet man als **power-counting-renormierbar**. Derartige Theorien müssen allerdings nicht unbedingt physikalisch sinnvoll sein (z.B. ϕ^3, H nicht nach unten beschränkt)

Beispiel QED

Bestimme $d = 4L - 2I_B - I_F$. n Vertices mit je einem Boson und zwei Fermionen, innere Linien mit je 2 Vertices

$$n = 2I_B + E_B \longrightarrow 2I_B = n - E_B \quad \text{und} \quad n = \frac{2I_F + E_F}{2} \longrightarrow 2I_F = 2n - E_F$$

$I = I_B + I_F$ ist die Anzahl der inneren Linien, d.h. es gibt I interne Impulse. Davon muß man $n-1$ mal Impulserhaltung (-1 für globale Impulserhaltung) abziehen und erhält somit $L = I - n + 1$ Integrationsimpulse. Setzt man das alles ein, erhält man den oberflächlichen Divergenzgrad zu

$$\longrightarrow \boxed{d = 4 - E_B - \frac{3}{2} E_F},$$

d.h. d ist nur abhängig von der Zahl der *äußeren* Linien und nicht von n, der Anzahl der Vertices. Aus diesem Grund gibt es nur endlich viele divergente Diagramme, die man mit endlich vielen Counter-Termen absorbieren kann. Wäre d abhängig von n (wie z.B. bei ϕ^6)[10], kann man durch Einfügen neuer Vertices beliebig viele zusätzliche Counter-Terme erzwingen; die Theorie ist nicht renormierbar.

Man erhält die in Abb. 8.9 abgebildeten primitiven Divergenzen Eine Theorie mit massiven Vektorbo-

[10] Bei ϕ^6 ist der oberlächliche Divergenzgrad

$$I_F = 0; \qquad n = \frac{2I_B + E_B}{6} \longrightarrow I_B = 3n - \frac{E_B}{2}$$
$$L = I_B - (n-1) \qquad \longrightarrow \boxed{d_{\phi^6} = 4L - 2I_B = 4 + 2n - E_B}$$

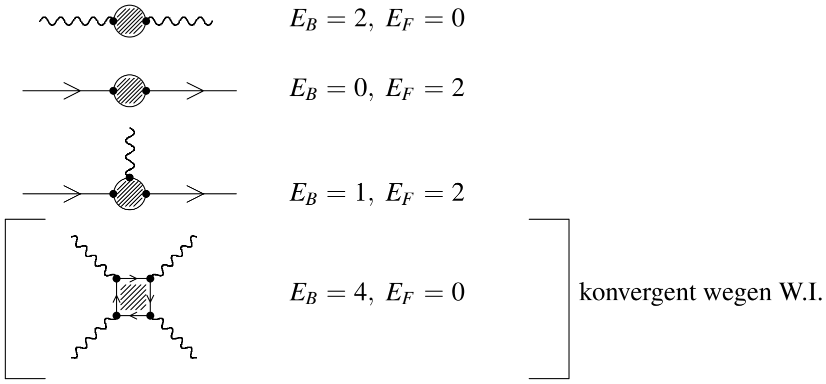


Abbildung 8.9: Primitive Divergenzen in der QED.

sonen z.B. massive QED ist auch power-counting-renormierbar

$$\text{Propagator f. massive Vektorbosonen} = \frac{1}{q^2 - m^2}\left(-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{M^2}\right)$$

(weil der massenabhängige Term im Propagator wegen der Stromerhaltung nicht beiträgt). Bei $U(1)$-Symmetrie folgt über die Ward-Identitäten die Renormierbarkeit.

Index