Theoretische Physik A
Mechanik

Sommersemester 93/94

Gerrit Jahn

29. September 2003

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Dieses Skriptum entstand nach der Vorlesung *Theoretische Physik A — Mechanik* von Prof. Peter Wölfle im Wintersemeseter 93/94 an der Uni Karlsruhe. Es kann wohl weder die Vorlesung noch ein gutes Lehrbuch ersetzen (obwohl es sich größtenteils nach dem Buch von Fließbach richtet), sondern soll (wie immer) nur eine Art Leitfaden durch die theoretische Mechanik darstellen.

Dieses Skript wurde nicht von Prof. Wölfle „autorisiert“, so daß dieser nicht für die Folgen evtl. Fehler zur Rechenschaft gezogen werden kann.

Ab sofort kann dieses Skript von folgender WWW-Seite bezogen werden:
`http://www.planetjahn.de/skripte`

Falls Probleme, Anmerkungen oder Berichtigungen bzgl. des Skripts bestehen sollten, findet sich meine Email-Adresse auf obiger Webseite.

München, Mai 2003,

Gerrit Jahn

Es seien nun kurz einige grundelegende Aspekte der Theoretischen Physik genannt.

Das Ziel der Theoretischen Physik ist es, möglichst allgemeingültige mathematische Formulierungen der Naturgesetze zu liefern und nicht, wie viele denken, mehr oder weniger gewagte Theorien auszustellen, die in der Realtität keinerlei Bestätigung finden können.

Die Vorgehensweise in der Theroetischen Physik ergibt sich aus der folgenden Aufstellung (speziell für die Mechanik, der diese Vorlesung gewidmet ist)

1. Sammlung von Beobachtungsdaten aus Naturvorgängen oder aus gezielten Experimenten.

2. Aufstellung empirischer Gesetze.

3. Definition von Begriffen (z.B. Masse, Kraft, Impuls).

4. Aufstellung von Differentialgleichungen in der Zeit, aus deren Lösung sich dann Vorraussagen über die Entwicklung physikalischer Systeme machen lassen.

5. Auffinden allgemeiner Prinzipien (Verallgemeinerung bereits bekannter Beziehungen), Symmetriebeobachtungen.

6. Erweiterung der Theorien durch mathematische oder logische Konsistenzargumente (z.B. Erweiterung des Ampere'schen Gesetzes durch Maxwell).

Die begleitende Literatur bestand aus „Fließbach, *Mechanik*“ und dem Standardwerk „Landau-Lifschitz, *Mechanik*“.

Auf den nächsten Seiten folgt zunächst eine kurze Darstellung der unbedingt benötigten Mathematik, bevor es mit einfacheren physikalischen Problemen dann richtig „losgeht“.

Kapitel 1

Grundbegriffe und math. Hilfsmittel

1.1 Mechanische Systeme

Physikalische Systeme sind materielle Körper, die i.a. miteinander wechselwirken oder äußeren Kräften ausgesetzt sind.

Das Ziel dieser Vorlesung besteht darin, eine mathematische Beschreibung der Bewegung (Dynamik) dieser Körper in Raum und Zeit, bzw. der stabilen Ruhelage (Statik) zu erhalten

Als Grundeigenschaft eines Körpers wird nur seine Masse vorausgesetzt, bzw., bei ausgedehnten Körpern, eine Massenverteilung.

Die „Wechselwirkungen" ergeben sich aus „konservativen" (erhaltenden) und „dissipativen" (z.B. Reibungs-) Kräften.

Systeme werden idealisiert als

- Systeme von Massenpunkten
- Starre Körper
- Kontinuierliche Medien (z.B. Flüssigkeiten, plastische und elastische Festkörper)

Der Zustand eines solchen Systems zur Zeit t ist vollständig bestimmt durch folgende Angaben:

- Ort $\{\vec{r}_n(t)\}$ der Teilchen $n = 1, 2, \ldots, N$ und
- Geschwindigkeit $\{\vec{v}_n(t)\}$

Die Bahnkurve eines Teilchen ergibt sich aus der Gesamtheit der Ortsvektoren (Punkte) $\vec{r}(t)$. Man kann die $\vec{r}_n(t)$ durch Messen der folgenden Größen bestimmen

- Länge (Maßeinheit: das Meter m)

- Zeit (Maßeinheit: die Sekunde s)

Im Verlauf der Vorlsesung wird die „nichtrelativistische Mechanik“ behandelt, d.h. Zeit ist „absolut“, was soviel bedeutet, wie die Unabhängigkeit des Zeitverlaufs von Ort und Bewegungszustand. (Dabei ist zu beachten, daß die Geschwindigkeit sehr viel kleiner als die Lichtgeschwindigkeit sein muß ($v \ll c$).

Zur Ortsbestimmung benötigt man ein „Koordinatensystem“ (KS). Drei Beispiele:

Das gebräuchliche Kartesische KS (KKS) hat rechtwinklige Koordinaten und ist isotrop, d.h., daß keine Raumrichtung ausgezeichnet ist. Ein KKS kann man nur im euklidischen (ebenen) Raum definieren, krummlinige Räume erfordern krummlinige Koordinaten (s.u.) Ortsvektoren der Massenpunkte lassen sich im KKS wie folgt darstellen

$$\vec{r} = (x, y, z) = x \cdot \hat{e}_x + y \cdot \hat{e}_y + z \cdot \hat{e}_z$$

Dabei stehen die Einheitsvektoren $\hat{e}_i$ senkrecht zueinander:

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij} \tag{1.1}$$

δ ist das Kronecker-Symbol.

Die Wahl des KS ist nicht eindeutig, denn in einem verschobenen oder verdrehten KS „verändern“ sich die Ortskoordinaten

$$\begin{array}{lccc} \text{Verschiebung} & \vec{r} & \longrightarrow & \vec{r} + \vec{a} \\ \text{Drehung} & \hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z & \longrightarrow & \hat{e}'_x, \hat{e}'_y, \hat{e}'_z \end{array}$$

Krummlinige Koordinaten sind z.B. Polarkoordinaten

$$\vec{r}(t) = (\varrho(t), \varphi(t), z(t))$$

mit ϱ, der Länge des Vektors, φ, dem Winkel zwischen x-Achse und der Projektion des Vektors in die x-y-Ebene und z, der „normalen“ z-Koordinate.

Ein weiteres Beispiel liefern die Kugelkoordinaten

$$\vec{r}(t) = (r(t), \Theta(t), \phi(t))$$

mit der Länge r, dem Winkel Θ der y-z-Ebene und ϕ, dem Winkel in der x-y-Ebene.

Eine weitere Möglichkeit, den Ortsvektor darzustellen, bildet die Parameterdarstellung

$$\vec{r}(t) = (x(\lambda), y(\lambda), z(\lambda), t(\lambda))$$

mit einem Parameter λ, der z.B. zwischen 0 und 1 läuft.

Nachdem nun der Ortsvektor, bzw. dessen Bahnkurve eingeführt wurde, liegt es nahe, Geschwindigkeit und Beschleunigung zu definieren

$$\begin{array}{lrcl} \text{Geschwindigkeit} & \vec{v}(t) & := & \dot{\vec{r}}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \\ \text{Beschleunigung} & \vec{b}(t) & := & \dot{\vec{v}}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \end{array}$$

Im KKS war $\vec{r}(t)$ gegeben durch

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{e}_x + y(t)\hat{e}_y + z(t)\hat{e}_z$$

dabei waren die $\hat{e}_i$ zeitunabhängig, was im krummlinigen KS nicht unbedingt der Fall sein muß, da man hierbei die Drehung des lokalen KKS berücksichtigen muß. (Beispiel: 2D-Polarkoordniaten)

$$x = x(\varrho, \varphi) = \varrho \cdot \cos\varphi; \qquad y = \varrho \cdot \sin\varphi$$

Betrachtet man nun das Wegstück $\mathrm{d}\vec{r}$, so erhält man

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\vec{r} &= \mathrm{d}x\hat{e}_x + \mathrm{d}y\hat{e}_y = \left(\frac{\partial x}{\partial \varrho} \cdot \mathrm{d}\varrho + \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \mathrm{d}\varphi\right)\hat{e}_x + \left(\frac{\partial y}{\partial \varrho} \cdot \mathrm{d}\varrho + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \cdot \mathrm{d}\varphi\right)\hat{e}_y \\ &= \underbrace{(\cos\varphi \cdot \hat{e}_x + \sin\varphi\hat{e}_y)}_{=\hat{e}_\varrho}\mathrm{d}\varrho + \underbrace{(-\varrho\sin\varphi \cdot \hat{e}_x + \varrho\cos\varphi \cdot \hat{e}_y)}_{=\varrho\cdot\hat{e}_\varphi}\mathrm{d}\varphi \\ &= \hat{e}_\varrho\mathrm{d}\varrho + \hat{e}_\varphi \cdot \varrho\mathrm{d}\varphi \end{aligned}$$

Das Rezept bei derartigen Problemen besteht meist darin, erst einmal die Einheitsvektoren des krummlinigen KS zu bestimmen (wobei man darauf zu achten hat, daß diese Einheitsvektoren auf 1 normiert sein müssen (Achtung! bei Kugelkoordinaten), woraufhin man dann mit diesen weiterhantieren kann (s.u.).

Stellt man nun nämlich die Bahnkurve $\vec{r}(t)$ durch Polarkoordinaten dar, erhält man (bei geeigneter Ausrichtung des lokalen KS):

$$\vec{r}(t) = \varrho \cdot \hat{e}_\varrho$$

Mit

$$\dot{\hat{e}}_\varrho = (-\sin\varphi \cdot \hat{e}_x + \cos\varphi\hat{e}_y) \cdot \dot{\varphi} = \hat{e}_\varphi \cdot \dot{\varphi}$$

erhält man die Geschwindigkeit aus der Ableitung von $\vec{r}(t)$ zu

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \dot{\varrho}\hat{e}_\varrho + \varrho\dot{\hat{e}}_\varrho = \dot{\varrho}\hat{e}_\varrho + \varrho\dot{\varphi}\hat{e}_\varphi \\ \vec{v}^2 &= \dot{\varrho}^2 + \varrho^2 \cdot \dot{\varphi}^2 \end{aligned}$$

(Das Quadrat der Geschwindigkeit vereinfacht sich wegen (1.1))

1.2 Mathematische Methoden

1.2.1 Vektoralgebra

Wie schon gesehen:

$$\text{Vektor: } \vec{a} \qquad \text{Betrag: } |\vec{a}| = a \qquad \text{Einheitsvektor: } \hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

a) Darstellung im KKS

$$\vec{a} = a_1\hat{e}_x + a_2\hat{e}_y + a_3\hat{e}_z = (a_1, a_2, a_3)$$
$$\{\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z\} = \{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\} = \{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$$
$$a = |\vec{a}| = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^{1/2}$$

b) Verknüpfen von Vektoren

- Skalarpdodukt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i = ab\cos\varphi$$

mit dem eingeschlossenen Winkel φ. Das Skalarprodukt eines Vektors mit sich selber bezeichnen wir als $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2$.

- Vektor- oder Kreuzprodukt

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= -\vec{b} \times \vec{a} \\ &:= \hat{e}_x(a_y b_z - a_z b_y) + \hat{e}_y(a_z b_x - a_x b_u) + \hat{e}_z(a_x b_y - a_y b_x) \end{aligned}$$

Eine weitere mögliche Schreibweise des Vektorprodukts ergibt sich mit folgender Determinante

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Wichtig für spätere Vorlesungen ist die Schreibweise mit dem „total antisymmetrischen Tensor“ (auch „Levi-Civita-Tensor“):

$$\epsilon_{ijk} := \begin{cases} 1 & \text{für } (i,j,k) \in \{(1,2,3)\} \text{ oder zykl. Vertausch.} \\ -1 & \text{für } (i,j,k) \in \{(2,1,3)\} \text{ oder zykl. Vertausch.} \\ 0 & \text{sonst, d.h. mindesten zwei Indizes identisch} \end{cases}$$

Mit diesem „Tensor“ (eigentlich Pseudotensor, s. Abschnitt über Tensoren) kann man das Vektorprodukt wie folgt definieren

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk} a_j b_k \hat{e}_i \\ (\vec{a} \times \vec{b})_i &= \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} a_j b_k \end{aligned}$$

1.2.2 Vektoranalysis

a) Differentialrechnung von Vektoren

$$\vec{a} = (a_1(u), a_2(u), a_3(u)) \qquad \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}u} = \left(\frac{\mathrm{d}a_1}{\mathrm{d}u}; \frac{\mathrm{d}a_2}{\mathrm{d}u}; \frac{\mathrm{d}a_3}{\mathrm{d}u}\right)$$

Beispiel Geschwindigkeit

$$|\vec{v}| = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{1/2} \equiv \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

dabei ist s die Bogenlänge (s.u.).
b) Integration von Vektoren

$$\int \vec{a}(u)\mathrm{d}u = \left(\int a_1(u)\mathrm{d}u; \int a_2(u)\mathrm{d}u; \int a_3(u)\mathrm{d}u\right)$$

In der Vorlesung wird $\int \mathrm{d}u a(u)$ statt $\int a(u)\mathrm{d}u$ geschrieben!
c) Begleitendes Dreibein (im lokalen KKS)

Eine Bahnkurve wird (s.o.) beschrieben durch $\vec{r}(t)$. Daraus ergibt sich die Bogenlänge $s(t)$ zu

$$s(t) = \int_{t_0}^{t_0+t} \left|\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t'}\right| \mathrm{d}t'$$

Im folgenden werden drei Vektoren definiert:

1. Tangenteneinheitsvektor

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s/\mathrm{d}t} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} =: \hat{t}$$

$\hat{t}$ nennt man Tangenteneinheitsvektor. Er gibt die Richtung an, in die sich ein Körper auf der Bahnkurve zur Zeit t bewegt.

2. Hauptnormaleneinheitsvektor

$$\frac{\mathrm{d}\hat{t}^2}{\mathrm{d}s} = 0 = 2\hat{t} \cdot \frac{\mathrm{d}\hat{t}}{\mathrm{d}s}$$

Die Null ergibt sich, da $\hat{t}$ nicht von s abhängt. Aus dem zweiten Teil der Gleichung ergibt sich, daß $\mathrm{d}\hat{t}/\mathrm{d}s$ senkrecht auf $\hat{t}$ steht. Man bezeichnet

$$\hat{n} := \kappa^{-1}\frac{\mathrm{d}\hat{t}}{\mathrm{d}s}$$

als Hauptnormalenvektor mit dem „Krümmungsradius“ κ.

$$\kappa^{-1} = \left(\left(\frac{\mathrm{d}\hat{t}}{\mathrm{d}s}\right)^2\right)^{1/2}$$

Aus dem Vektorprodukt der beiden vorigen Vektoren ergibt sich noch ein weiterer Vektor, der zu den beiden anderen orthogonal ist.

3. Binormaleneinheitsvektor

$$\hat{m} := \hat{t} \times \hat{u}$$

Als Beispiel für die vorangegangenen Definitionen kann man die Beschleunigung eines Teilchens entlang der Kurve C betrachten:

$$\begin{aligned}
\vec{v} &= \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s}}_{=\hat{t}} \cdot \underbrace{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}}_{=v} = v \cdot \hat{t} \\
\Rightarrow \vec{b} &= \hat{t}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + v\frac{\mathrm{d}\hat{t}}{\mathrm{d}t}; \qquad \frac{\mathrm{d}\hat{t}}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\frac{\mathrm{d}\hat{t}}{\mathrm{d}s}}_{=\kappa\cdot\hat{n}} \cdot \underbrace{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}}_{=v} \\
\Longrightarrow \vec{b} &= \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\hat{t} + \kappa v^2 \hat{n}
\end{aligned}$$

Dabei ist der zweite Teil der obigen Gleichung für $\vec{b}$ der Spezialfall der Kreisbeschleunigung ($\sim v^2/r$).

d) Räumliche Ableitungen: Gradient, Divergenz, Rotation

Man bezeichnet

$$\vec{A}(x, y, z) : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$$

als <u>Vektorfeld</u> und

$$\phi(x, y, z) : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}$$

als Skalarfeld. Wir definieren nun einen Vektor-Differentialoperator, auch „Nabla-Operator“ genannt

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} &= \hat{e}_x \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \hat{e}_y \cdot \frac{\partial}{\partial y} + \hat{e}_z \cdot \frac{\partial}{\partial z} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right) \\
&= (\nabla_x, \nabla_y, \nabla_z) = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)
\end{aligned}$$

Mit diesem Vektor kann man nun folgende Operationen durchführen:

(i) <u>Gradient</u> eines Skalarfeldes

$$\vec{\nabla}\phi(x, y, z) := \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right) = \mathrm{grad}\phi$$

Als Beispiel möge die Kraft $\vec{K}$ als Ableitung des Potential $\vec{U}$ dienen ($\vec{K} = -\vec{\nabla}U$).
(ii) Divergenz eines Vektorfeldes

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} := \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial A_i}{\partial x_i} = \mathrm{div}\vec{A}$$

Beispiel: Divergenz des Radiusvektors $\vec{r}$ ($\vec{\nabla} \cdot \vec{r} = 3$).
(iii) Rotation eines Vektorfeldes

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{A} &:= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x} \right) \\ &= \sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk} \hat{e}_i \partial_j A_k = \mathrm{rot}\vec{A} \end{aligned}$$

(iv) höhere Ableitungen

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$$

(die Divergenz eines Wirbelfeldes ist $= 0$)

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\phi = 0$$

(die Rotation eines Gradientenfeldes ist $= 0$)

Laplace-Operator $$\Delta := \vec{\nabla}^2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

(v) Kurvenintegrale
Gegeben sei ein Vektorfeld $\vec{A}$, dann gilt

$$I_C = \int_C \vec{A} d\vec{r} = \int_C A_x \mathrm{d}x + \int_C A_y dy + \int_C A_z dz$$

Die Integration hängt vom Integrationsweg C ab, sofern $\vec{A}$ kein Gradientenfeld ist!
(vi) Taylorentwicklung
wichtige Sache in der theoretischen Physik. Steht in jedem Mathebuch. (Genaueres später).

Kapitel 2

Newton'sche Mechanik

2.1 Newton'sche Axiome

1. Axiom: Es gibt Bezugssysteme (BS) in denen die kräftfreie Bewegung eines Massenpunktes geradlinig und gleichförmig verläuft, d.h. $\dot{\vec{r}}(t) = \vec{v} = \overrightarrow{konst}$. Solche BS nennt man Inertialsysteme (IS).

2. Axiom: Die zeitliche Änderung des Impulses eines Massenpunktes im IS ist gleich einer angewandten Kraft:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{K} \quad \text{(im IS)} \qquad \text{Impuls: } \vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

Sieht man die Masse (was fast immer gegeben ist) also konstant an, so erhält man

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{K},$$

was auch „Newton'sche Bewegungsgleichung" genannt wird. Anhand dieses 2. Axioms kann man nun die Begriffe Masse und Kraft definieren. Man erhält als „Meßvorschrift" für die

Masse: Man nehme zwei Massenpunkte m_1, m_2, auf die eine konst. Kraft $\vec{K}$ wirkt. Durch Messung der Beschleunigungen $\vec{b}_i$ bzw. $\ddot{\vec{r}}_i$ erhält man

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\vec{b}_2}{\vec{b}_1}$$

Irgendwann in ferner Vergangenheit wurde ein Körper als Masseneinheit definiert ($1kg$).

Kraft: Man setze einen Massenpunkt m nacheinander zwei versch. Kräften $\vec{K}_1, \vec{K}_2$ aus und erhält

$$\frac{|\vec{K}_1|}{|\vec{K}_2|} = \frac{|\vec{b}_1|}{|\vec{b}_2|}$$

(Die Richtung von $\vec{K}$ liegt parallel zu $\vec{b}$).

Die oben eingeführte Masse nennt man träge Masse, da sie als Proportionalitätsfaktor in einer Trägheitsbeziehung eingeführt wurde, im Gegensatz zur schweren Masse, die sich im Gravitiationspotential analog einer elektrischen Ladung im elektrostatischen Potential verhält.

Erstaunlicherweise wurde experimentell mit hoher Genauigkeit die Gleichheit der trägen und der schweren Masse bestätigt, so daß man sie praktischerweise einfach gleichsetzt: $m_T = m_S = m$.

3. Axiom

$$\vec{K}_{\text{actio}} = -\vec{K}_{\text{reactio}}$$

Das bedeutet, daß eine von einem Massenpunkt auf einen anderen ausgeübte Kraft immer eine entgegengesetzt gleichgroße Kraft des anderen Massenpunktes erfordert.

Zu diesem Axiom wurden später zwei Zusätze gefunden, die einige „Spezialfälle“ (s.u.) ausschließen.

1. Zusatz Die Kraft zweier Massenpunkte wirkt immer in Richtung der Verbindungsgeraden

$$(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{K}_{12} = 0$$

2. Zusatz Die Gesamtkraft ergibt sich aus der Summe der Einzelktäfte (Superpositionsprinzip)

$$\vec{K} = \sum_i \vec{K}_i$$

2.2 Eindimensionale Bewegung eines Massenpunktes

Bei der Betrachtung physikalische Probleme sind in der Theoretischen Mechanik folgende Schritte durchzuführen (s. auch o.).

1. Definition des Systems
   - Anzahl und Massen der zu betrachtenden Massen
   - Festlegung der Kraftgesetze
2. Auffinden von Symmetrien des Systems und der Identifizierung der Erhaltungsgrößen (s.u.)

3. Integration der Newton'schen Bewegungsgleichung (evtl. für jeden Massenpunkt)

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{K}(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t)$$

   Man erhält also eine Differentialgleichung 2. Ordnung, demnach benötigt man zwei Anfangsparameter pro Variable (x, y, z). Meist Ort und Geschwindigkeit $(\vec{r}(t_0), \dot{\vec{r}}(t))$.

4. Bestimmung der Integrationskonstanten der Lösung aus den Anfangsbedingungen

5. Diskussion und Klassifizierung der Lösung

Diese Schritte sollen (außer 2.) an einem „praktischen" Beispiel vorgerechnet werden, dem „Massenpunkt im eindimensionalen Raum".

Zuerst schreibt man die Newton'sche Bewegungsgleichung auf (in diesem einfachsten Fall soll die Kraft nur vom Ort des Teilchens abhängen)

$$m\ddot{x}(t) = K(x(t)); \qquad \text{speziell: } K = K(x).$$

Um nun diese Differentialgleichung zu lösen, multipliziert man sie mit $\dot{x}$ durch und erhält:

$$(m\dot{x}\ddot{x} = m \cdot \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dot{x}^2) = (\dot{x}K(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{x_0}^{x} K(x')\mathrm{d}x')$$

Das Negative des Integrals bezeichnet man üblicherweise als Potentielle Energie

$$U(x) := -\int\limits_{x_0}^{x} K(x')\mathrm{d}x'$$

Damit erhält man durch einfaches Umstellen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m}{2}\dot{x}^2 + U(x)\right) = 0$$

Dabei bezeichnet man

$$\frac{m}{2}\dot{x}^2 = \frac{1}{2}mv^2 =: T$$

als kinetische Energie und die Summe aus kinetischer und potentieller Energie einfach als „Energie" des Systems.

$$E := \frac{m}{2}\dot{x}^2 + U(x)$$

Löst man nun unsere Bewegungsgleichung nach $\dot{x}$ auf, ergibt sich

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))} \stackrel{\dot{x}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}{\Longrightarrow} \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}}$$

Durch Integration der beiden Seiten erhält man als Lösung

$$t - t_0 = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}x'}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x'))}}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$x(t_0) = x_0 \qquad \dot{x}(t_0) = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x_0))}$$

In der theoretischen Physik betrachtet man ein Problem als gelöst, wenn man bis zum Integral vorgedrungen ist (wie in unserem Fall), es schließt sich nun noch eine Diskussion der Lösung an

Um die Lösung der eindimensionalen Bewegung eines Teilchens z.B. graphisch zu diskutieren gebe man sich z.B. ein Potential wie in Abb. 2.1 vor:

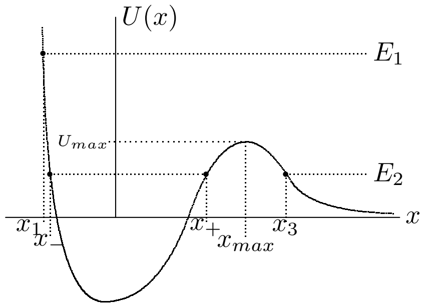

Abbildung 2.1: Eindimensionale Bewegung im Potential $U(x)$

Hierbei bestehen für ein Teilchen (einen Massenpunkt) mit versch. Energien prinzipiell zwei Möglichkeiten

- $E \geq U_{max}$, das Teilchen der Energie E_1 kann sich unbeschränkt nach rechts bewegen, oder, mathematisch ausgedrückt:

  $$x_1 < x(t) < \infty$$

  Der entsprechende Fall liegt auch vor bei der Energie E_2 und einem Anfangsort rechts von x_3

- $E < U_{max}, x_- < x_0 < x_+$, das Teilchen befindet sich zwischen den „Umkehrpunkten“ x_- und x_+ in einer Potentialmulde, es führt eine „finite“ Bewegung aus, die sich periodisch wiederholt. Es gilt also immer

  $$x_- < x(t) < x_+$$

  da der Potentialberg normalerweise nicht überwunden werden kann. Die periodische Bewegung des Teilchen ist i.a. <u>nicht</u> harmonisch.
  Die Periodendauer T ergibt sich wie folgt

  $$T = 2 \cdot \int\limits_{x_-}^{x_+} \frac{\mathrm{d}x'}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x'))}}$$

  Beim „harmonischen Oszillator“ ist die Periodendauer unabhängig von der Energie E, dies kann man erreichen durch Setzen von

  $$\xi = \frac{x}{\sqrt{E}}$$

  Setzt man das ξ nun in das obige Integral ein, erhält man

  $$T = 2 \cdot \int\limits_{x_-/\sqrt{E}}^{x_+/\sqrt{E}} \frac{\mathrm{d}\xi\sqrt{E}}{\sqrt{\frac{2}{m}E(1 - \frac{1}{E}U(\xi \cdot \sqrt{E})}}$$

  Um nun unabhängig von E zu werden muß für U ein quadratisches Gesetz gefordert werden

  $$U(x) = \frac{m}{2}\omega_0^2 x^2$$

  Setzt man dies nun ebenfalls ein, erhält man

  $$T = 2\sqrt{\frac{m}{2}} \int\limits_{x_-/\sqrt{E}}^{x_+/\sqrt{E}} \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{1 - \frac{m}{2}\omega_0^2\xi^2}}$$

  Jetzt substituiert man einen Teil der Wurzel

  $$u^2 = \tfrac{m}{2}\omega_0^2\xi^2 \Longrightarrow u = \sqrt{\tfrac{m}{2}}\omega_0\xi$$
  $$\Longrightarrow \mathrm{d}\xi = \sqrt{\tfrac{m}{2}}\tfrac{1}{\omega_0}du$$

  Die Integrationsgrenzen sind durch u_{int} (s.u.) zu substituieren. Dabei ist zu bedenken, daß in den Umkehrpunkten $E = U(x\pm)$ ist, demnach ergibt sich

  $$\begin{aligned} E &= U(x) = \frac{m}{2}\omega_0^2 x_\pm^2 \\ u_{int} &= \sqrt{\frac{m}{2}}\omega_0 \frac{x_\pm}{\sqrt{E}} \\ \Longrightarrow u_{int} &= \sqrt{\frac{m}{2}}\omega_0 \frac{x_\pm}{\sqrt{\frac{m}{2}\omega_0^2 x_\pm^2}} = \pm 1 \end{aligned}$$

Somit ergibt sich also die Periodendauer im Falle der Unabhängigkeit von E zu

$$T = \frac{2}{\omega_0} \int\limits_{-1}^{1} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Es ergab sich also (wie auch aus der Experimentalphysik bekannt ist), daß Periodendauer und Kreisfrequenz beim harmonischen Oszillator wie folgt zusammenhängen

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Am Ende dieses ersten Problems sei noch erwähnt, daß man Differentialgleichungen 2. Ordnung, die beim Oszillator auftreten, immer lösen kann. Ein Gleichung der Bauart

$$m\ddot{x} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} U(x) = m\omega_0^2 x$$

läßt sich mit folgendem Ansatz lösen

$$x(t) = \exp(\pm i\omega_0 t)$$

2.3 Erhaltungssätze

Unter „Erhaltungsgrößen" (EG) versteht man physikalische Größen, die sich im Laufe der Zeit nicht ändern, sie werden auch als „Bewegungsintegrale" bezeichnet.

Bei physikalischen Systemem stellt sich die Frage, wieviele und welche Erhaltungsgrößen überhaupt existieren.

Eine „unqualifizierte Definition" könnte sich wie folgt ergeben (wieder am Beispiel der 1-D-Bewegung): Man hat zwei Freiheitsgrade, also muß man auch zwei Erhaltungsgrößen haben:

$$1.EG \qquad E = \frac{m}{2}\dot{x}^2(t) + U(x(x))$$

$$2.EG \qquad t - t_0 = \int\limits_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{\mathrm{d}x'}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x')}} = f(x(t)) - f(x(t_0))$$

Daraus könnt sich folgende Definition ergeben

$$\underline{\text{Def.:}} \qquad \Phi = f(x(t)) - t = f(x(t_0)) - t_0 = konst$$

Man hat somit also eine Erhaltungsgrößs gefunden, mit der man allerdings nicht viel Freude haben wird, da sie erstens nicht besonders nützlich ist und zweitens explizit von der Zeit abhängt.
Ein „qualifizierte Definition" sieht hingegen so aus: Eine Erhaltungsgröße muß

- nicht explizit von der Zeit abhängig und
- additiv sein ($\sum_i EG_i = EG_{ges}$).

Außerdem gibt es noch irgendwelche Zusammenhänge mit den Symmetrien eines Systems (s. Abschnitt Noethertheorem)

In realistischen System gibt es auch nicht sonderlich viele EG, einige Beispiel für EG:

1. Energie (s.o)

2. Impuls.

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = 0 \Longrightarrow \vec{p} = konst \qquad \text{(ohne Kräfte, im Inertialsystem)}$$

3. Drehimpuls. Den Drehimpuls erhält man, indem man die Newton'sche Bewegungsgleichung mit dem Radiusvektor $\vec{r}$ vektoriell multipliziert

$$m\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = \vec{r} \times \vec{K}; \qquad m\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \underbrace{(\vec{r} \times m\dot{\vec{r}})}_{=\vec{L}}$$

Wir haben also den Drehimpuls erhalten als

$$\vec{L} := \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\dot{\vec{r}} \tag{2.1}$$

Definiert man jetzt das „Drehmoment“ $\vec{M}$ durch

$$\underline{\text{Def.:}} \quad \vec{M} := \vec{r} \times \vec{K} \tag{2.2}$$

ergibt sich ein Analogon zur Bewegungsgleichung

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{M}. \tag{2.3}$$

Der Drehimpuls ist also konstant, falls kein Drehmoment vorhanden ist

$$\vec{M} = 0 \Longrightarrow \vec{L} = konst.$$

in diesem Fall muß nicht einmal absolute Kräftefreiheit gefordert werden, denn die sog. „Zentralkraft“, längs des Radiusvektors ist erlaubt. Mathematisch:

$$\vec{L} = konst \text{ auch bei } \vec{K} \neq 0, \text{ falls } \vec{K} = \hat{r} \cdot K(r)$$

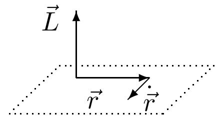

Abbildung 2.2: Der Drehimpulsvektor steht senkrecht auf dem Orts- und Geschwindigkeitsvektor

4. „Fläche". Aus den obigen Überlegungen folgt, daß der Drehimpulsvektor senkrecht auf der Bahnkurve $\vec{r}(t)$ und dem Geschwindigkeitsvektor $\dot{\vec{r}}(t)$ stehen muß (s. Abb. 2.2). Transformiert man nun die Koordinaten von $\vec{r}$ in Polarkoordinaten, so, daß die z-Achse parallel zu $\vec{L}$ liegt, erhält man, indem man das transformierte $\vec{r}$ in Gl. (2.1) einsetzt:

$$\frac{1}{m}\vec{L}\cdot\hat{e}_z = \vec{r}\times\dot{\vec{r}} = \varrho\hat{e}_\varrho \times (\dot{\varrho}\hat{e}_\varrho + \varrho\dot{\hat{e}}_\varrho) = \varrho^2(\hat{e}_\varrho\times\hat{e}_\varphi)\cdot\dot{\varphi} = \varrho^2\dot{\varphi}\hat{e}_z$$

Mit den Bezeichnungen aus Abb. 2.3 ergibt sich die pro Zeitintervall $\mathrm{d}t$

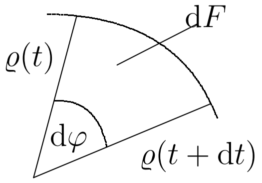

Abbildung 2.3: Die Fläche, die der Radiusvektor überstreicht, ist zeitlich konstant.

überstrichene Fläche $\mathrm{d}F$ zu

$$\mathrm{d}F := \frac{1}{2}\varrho^2\mathrm{d}\varphi$$

Nun bildet man die Flächengeschwindigkeit $\mathrm{d}F/\mathrm{d}t$:

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\varrho^2\dot{\varphi} = \frac{1}{2m}L_z = konst$$

Damit haben wir nachgewiesen, daß die pro Zeit überstrichene Fläche zeitlich konstant und somit eine Erhaltungsgröße ist.

5. Energie. Wir gehen wieder von der Newton'schen Bewegungsgleichung aus und erhalten

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{K} \qquad |\cdot\dot{\vec{r}}$$
$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tfrac{1}{2}m(\dot{\vec{r}})^2 = \dot{\vec{r}}\vec{K} = N$$

Für den Fall $\vec{K}=0$ hatten wir bereits den Term

$$\frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 = konst$$

als kinetische Energie identifiziert. Bei vorhandener Kraft $\vec{K} \neq 0$ ergibt sich $\vec{K}\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}A$ und

$$N := \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \vec{K}\dot{\vec{r}}.$$

N nennt man Leistung und dA entspricht der geleisteten Arbeit im Zeitintervall dt.

Die Arbeit ergibt sich demnach aus der oberen Gleichung zu

$$A = \int\limits_{\vec{r}_1,C}^{\vec{r}_2} \vec{K}\mathrm{d}\vec{r}$$

Falls $\vec{K} = \vec{K}(\vec{r})$ gegeben ist, die Kraft also nur vom Ort des Teilchens

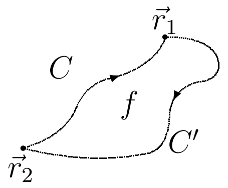

Abbildung 2.4: Die Arbeit ist i.a. abhängig vom Integrationsweg C

abhängt, kann man die Kraft durch das Potential ausdrücken

$$-\vec{K}\dot{\vec{r}} = \frac{\mathrm{d}U(\vec{r})}{\mathrm{d}t} = \vec{\nabla}U \cdot \dot{\vec{r}} \Longrightarrow \boxed{\vec{K} = -\vec{\nabla}U}$$

Daraus ergibt sich wieder wie bei der eindimensionalen Bewegung die Energie des System zu

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 + U(\vec{r})\right) = 0 \Longrightarrow \boxed{E = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 + U(\vec{r}) = konst.}$$

Die Kräfte, die die Bedingung $\vec{K} = \vec{K}(\vec{r})$ erfüllen, nennt man *konservative Kräfte* . Für konservative Kräfte gilt weiterhin, daß das obiges Integral wegunabhängig ist, bzw. das Kreisintegral verschwindet:

$$\left(\int_C + \int_{C'}\right)\vec{K}\mathrm{d}\vec{r} = 0 = \oint \vec{K}\mathrm{d}\vec{r} \stackrel{\text{Stokes'scher IS}}{=} \int (\vec{\nabla}\times\vec{K})\mathrm{d}\vec{f}$$

Die letzte Beziehung gilt also, falls $\vec{\nabla} \times \vec{K} = 0$ ist, was im vorliegenden Fall erfüllt ist, da U ein Gradientenfeld ist.

Ein Beispiel für ein konservative, energieerhaltende Kraft liefert die Lorentzkraft:

$$\vec{K} = \frac{q}{c}(\dot{\vec{r}} \times \vec{B}) \qquad | \cdot \dot{\vec{r}}$$

2.4 System von Massenpunkten

Wir benötigen bei den folgenden Betrachtungen N Massenpunkt mit den Massen m_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, N)$. Die Newton'schen Bewegungsgleichungen der einzelnen Massenpunkte ergeben sich zu

$$m_\nu \ddot{\vec{r}} = \vec{K}_\nu = \sum_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq \nu}}^{N} \vec{K}_{\nu\mu} + \vec{K}_\nu^{(a)} \tag{2.4}$$

Dabei sind die $\vec{K}_\nu^{(a)}$ die äußeren Kräfte, die auf das Teilchen einwirken können und die $\vec{K}_\nu$ die Wechselwirkungskräfte zwischen (hier) je zwei Teilchen.

2.4.1 Betrachtung der Erhaltungseigenschaften

1: Schwerpunktsimpuls.
Der Schwerpunktsvektor $\vec{R}$ ist gegeben durch

$$\vec{R} := \frac{1}{M} \sum_{\nu=1}^{N} m\nu \vec{r}_\nu; \qquad M := \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu$$

Damit ergeben sich die Newton'schen Bewegungsgleichungen zu

$$\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \ddot{\vec{r}}_\nu = M\ddot{\vec{R}} = \sum_{\nu=1}^{N} \sum_{\substack{\mu=1 \\ \nu \neq \mu}}^{N} \vec{K}_{\nu\mu} + \sum_{\nu} \vec{K}_\nu^{(a)}$$

Wegen dem 3. Newton'schen Axiom entfallen die inneren Kräfte:

$$\vec{K}_{\nu\mu} = -\vec{K}_{\mu\nu} \Longrightarrow M\ddot{\vec{R}} = \sum_{\nu=1}^{N} \vec{K}_\nu^{(a)}$$

Wir haben also herausgefunden, daß, sofern keine äußeren Kräfte vorhanden sind, folgendes gilt

$$\vec{P} = M\dot{\vec{R}} = 0$$

was besagt, daß der Schwerpunktsimpuls konstant ist, sofern keine äußeren Kräfte einwirken.
2: Gesamtdrehimpuls. Multipliziert man (2.4) vektoriell mit $\vec{r}_\nu$, ergibt sich

$$\sum_{\nu=1}^{N} \vec{r}_\nu \times m_\nu \ddot{\vec{r}} = \sum_{\nu=1}^{N} \vec{r}_\nu \times \vec{K}_\nu$$

daraus ergibt sich der Gesamtdrehimpuls zu

$$\vec{L} = \sum_{\nu=1}^{N} \vec{r}_\nu \times m_\nu \dot{\vec{r}}_\nu = \sum_{\nu=1}^{N} \vec{L}_\nu$$

Betrachtet man nun

$$\sum_{\substack{\nu,\mu=1\\ \mu\neq\nu}}^{N} \vec{r}_\nu \times \vec{K}_{\nu\mu} \overset{\nu\leftrightarrow\mu}{=} \sum_{\substack{\nu,\mu=1\\ \mu\neq\nu}}^{N} \vec{r}_\mu \times \vec{K}_{\mu\nu} \overset{\text{3. Axiom}}{=} -\sum_{\substack{\nu,\mu=1\\ \mu\neq\nu}}^{N} \vec{r}_\mu \times \vec{K}_{\nu\mu}$$

Diese letzte Gleichung kann man nun umschreiben in

$$\sum_{\substack{\nu,\mu=1\\ \mu\neq\nu}}^{N} \vec{r}_\nu \times \vec{K}_{\nu\mu} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{\nu,\mu=1\\ \mu\neq\nu}}^{N} (\vec{r}_\nu - \vec{r}_\mu) \times \vec{K}_\nu^{(a)} \overset{\text{2. Zusatz}}{=} 0$$

Wir haben somit also erhalten, daß die inneren Kräfte kein Drehmoment erzeugen und deshalb den Gesamtdrehimpuls nicht ändern. Betrachtet man aber die äußeren Kräfte, so erhält man

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \sum_{\nu=1}^{N} \vec{r}_\nu \times \vec{K}_\nu^{(a)} = \vec{M} \Longrightarrow \vec{L} = konst,\ \text{falls} \vec{M} = 0$$

Man kann erkennen, daß die äußeren Kräfte ein Gesamtdrehmoment bewirken, welches eine zeitliche Änderung des Gesamtdrehimpulses hervorruft.
3: Energie. Wir gehen wieder von der Newton'schen Bewegungsgleichung aus, die mit $\vec{r}$ skalar multipliziert und dann aufsummiert wird:

$$\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\vec{r}}_\nu \ddot{\vec{r}}_\nu = \sum_{\nu=1}^{N} \dot{\vec{r}}_\nu \vec{K}_\nu$$

Wir wollen uns momentan auf die konservative Kräfte (s.o.)

$$\vec{K} = \vec{K}(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N)$$

beschränken. Mit obigem $\vec{K}$ erhalten wir ein Potential, welches von den Orten der Massenpunkte abhängt:

$$\sum_{\nu=1}^{N} \vec{K}_\nu \dot{\vec{r}}_\nu = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} U(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N) = -\sum_{\nu=1}^{N} \vec{\nabla}_\nu U \cdot \dot{\vec{r}}_\nu$$

dabei ist

$$\vec{\nabla}_\nu = \frac{\partial}{\partial x_\nu}\hat{e}_1 + \frac{\partial}{\partial y_\nu}\hat{e}_2 + \frac{\partial}{\partial z_\nu}\hat{e}_3$$

Somit ergibt sich also die Kraft aus dem Potential zu

$$\Longrightarrow \vec{K}_\nu = \vec{\nabla}_\nu U(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N) \tag{2.5}$$

Bei Anwesenheit äußerer Kräfte ergibt sich das Potential durch

$$U = U^{(i)} + U^{(a)}$$

mit

$$U^{(i)} = \sum_{\substack{\nu,\mu=1 \\ \nu\neq\mu}}^{N} U_{\nu\mu}(\vec{r}_\nu, \vec{r}_\mu) \qquad U^{(a)} = \sum_{\nu=1}^{N} U_\nu^{(a)}(\vec{r}_\nu)$$

Wendet man das 3. Axiom auf Gleichung (2.5) an, so ergibt sich

$$\vec{K}_{\nu\mu} = -\vec{\nabla}_\nu \sum_{\substack{\nu,\mu=1 \\ \nu\neq\mu}}^{N} U_{\nu\mu}(\vec{r}_\nu, \vec{r}_\mu) = -K_{\mu\nu} = +\vec{\nabla}_\nu \sum_{\substack{\mu,\nu=1 \\ \mu\neq\mu}} U_{\mu\nu}(\vec{r}_\mu, \vec{r}_\nu)$$

Da U eine skalare Größe ist, kann es nur von den folgenden drei Skalaren abhängen

$$(\vec{r}_\nu)^2; \quad (\vec{r}_\mu)^2; \quad (\vec{r}_\nu - \vec{r}_\mu)^2$$

Andere Skalarprodukte ergeben sich aus den Linearkombinationen der obigen drei Ausdrücke. Da die Gradienten von $U_{\mu\nu}$ im 3. Axiom bez. μ und ν entgegengesetztes Vorzeichen haben müssen, fallen die ersten beiden Skalare ebenfalls weg und es ergibt sich

$$U_{\nu\mu}(\vec{r}_\nu, \vec{r}_\mu) = U_{\nu\mu}(|\vec{r}_\nu - \vec{r}_\mu|)$$

Zwei Beispiele: 1. Coulomb-Wechselwirkungen zwischen elektrischen Ladungen

$$U_{\nu\mu}^{\text{Coulomb}}(|\vec{r}_\nu - \vec{r}_\mu|) := \frac{q_\nu \cdot q_\mu}{|\vec{r}_\nu - \vec{r}_\mu|}$$

2. Gravitations-Wechselwirkungen zwischen zwei Massen

$$U_{\nu\mu}^{\text{Gravitation}}(|\vec{r}_\nu - \vec{r}_\mu|) := -G \cdot \frac{m_\nu \cdot m_\mu}{|\vec{r}_\nu - \vec{r}_\mu|}$$

(G Gravitationskonstante)

2.5 Bewegte Bezugssysteme

Lineare Transformation zwischen Bezugsystemen

2.5.1 Galilei-Transformation, bewegte Inertialsysteme

Im Inertialsystem IS werden die Koordinaten $(x, y, z) = (x_1, x_2, x_3)$ eingeführt, welchen die Koordinaten $(x', y', z') = (x'_1, x'_2, x'_3)$ im transformierten IS KS' entsprechen.

<u>1. Fall</u> parallele Verschiebung der Koordinaten von IS nach KS'

$$\vec{r}(t) = \vec{r}'(t) + \vec{d}(t)$$

Es stellt sich die Frage, wie sich KS' gegenüber IS bewegen darf, ohne die Newton'schen Axiome zu verletzen. <u>1. Axiom</u>

$$m\ddot{\vec{r}} = 0 \Longrightarrow m\ddot{\vec{r}}' = 0$$
$$\Longrightarrow \ddot{\vec{d}} = 0 \Longrightarrow \vec{d}(t) = \vec{v} \cdot t + \vec{a}$$

Dabei spielt $\vec{v}$ die Rolle einer konstanten Relativgeschwindigkeit und $\vec{a}$ die eines Verschiebungsvektors.

<u>2. Fall</u> KS-Achsen gegeneinander verdreht

$$x'_i = \sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, 3$$

dabei ist α_{ij} eine Drehmatrix für die gilt

$$\alpha^{-1} = \alpha^T \qquad \sum_{l=1}^{3} \alpha_{il} \alpha^T_{lj} = \delta_{ij}$$

(das soll zeigen, daß die Abstände zum Koordinatenursprung unverändert bleiben).

Das erste Newton'sche Axiom läßt sich in einem gedrehten KS so darstellen

$$m\ddot{x}'_i = m \sum_{j=1}^{3} (\ddot{\alpha}_{ij} x_j + 2\dot{\alpha}_{ij}\dot{x}_j + \underbrace{\alpha_{ij}\ddot{x}_j}_{=0 \ (\text{1.Axiom})})$$

Daraus folgt, daß sich nur zeitunabhängige Drehungen mit dem ersten Axiom vereinbaren lassen.

Faßt man die obigen beiden Fälle der linearen Verschiebung und der Drehung zusammen, erhält man die allgemeinste Transformation, die IS ineinander überführt:

$$x'_i = \sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij} x_j + v_i \cdot t + a_i; \qquad \dot{x}'_i = \sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij} \dot{x}_j + v_i$$

Man könnte der Vollständigkeit halber noch eine Zeittransformation einführen

$$t' = t - t_0,$$

was aber für unsere Zwecke wohl nicht nötig ist.

Es sei am Rande noch erwähnt, daß die Galileitransformationen eine 10-parametrige Gruppe bilden.

Am Ende des Abschnitts Galilei-Transformation seien noch einige Begriffe erwähnt. Bei einer „passiven Transformation“ wird ein physikalisches System aus zwei Bezugssystemen beobachtet, man erhält für die NB

$$m\ddot{x}_i = K_i \Longrightarrow m\ddot{x}'_i = \sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij} K_j = K'_i$$

Die Gleichungen haben also dieselbe Gestalt, sie sind „forminvariant“ oder „kovariant“, jedoch nicht invariant, da die Bewegung, die die Gleichungen beschreiben nicht genau gleich sind, da i.a. andere Kräfte in den versch. BS wirken.

speziell: Schreibt man für ein abgeschlossenes System die Newton'schen Bewegungsgleichungen im System KS und KS' auf, erhält man für Drehungen:

$$\begin{aligned}
\vec{K}_\nu &= -\sum_{\mu,\nu\neq\mu} \vec{\nabla}_\nu U_{\nu\mu}(|\vec{r}_\nu - \vec{r}_\mu|); \qquad |\vec{r}_\nu - \vec{r}_\mu| = |\vec{r}'_\nu - \vec{r}'_\mu| \\
\Longrightarrow (\vec{K}'_\nu)_i &= \sum_j \alpha_{ij} (\vec{K}_\nu)_i = \sum_j \alpha_{ij} - \frac{\partial}{\partial x^\nu_j} U_{\nu\mu}(|\vec{r}_\nu - \vec{r}_\mu|) \\
&= -\frac{\partial}{\partial x'_{j^\nu}} U_{\nu\mu}(|\vec{r}'_\nu - \vec{r}'_\mu|)
\end{aligned}$$

Der letzte Schritt gilt, da

$$\sum \alpha_{ij} \frac{\partial}{\partial x^\nu_j} = \sum_l \alpha_{ij} \frac{\partial}{\partial x_l{}'} \underbrace{\frac{\partial x_l{}'}{\partial x_j{}'}}_{=\alpha_{lj}} = \sum_{j,l} \alpha_{ij}\alpha_{lj} \frac{\partial}{\partial x_l{}'} = \frac{\partial}{\partial x_i{}'}$$

Bei dieser „aktiven Transformation“ änderen sich sowohl die Bewegungsgesetze, als auch die eigentliche Bewegung nicht. Die Bewegungsgesetze sind also sowohl invariant als auch kovariant.

2.6 Beschleunigte Bezugssysteme

Newton'sche Axiome gelten gemäß den obigen Überlegungen in beschleunigten BS **nicht**!

2.6.1 lineare Beschleunigung

Das BS KS' wird relativ zu IS konstant beschleunigt. Der Verschiebungsvektor ergibt sich dann als

$$\vec{d}(t) = \frac{1}{2}\vec{b}t^2$$

Damit erhält man die folgende Transformationsgleichung

$$\vec{r}(t) = \vec{r}'(t) + \vec{d}(t) = \vec{r}'(t) + \frac{1}{2}\vec{b}t^2$$

Wenn jetzt also im Inertialsystem Kräftefreiheit herrscht, folgt:

$$\text{IS:}\ \ m\ddot{\vec{r}} = 0 \longrightarrow \text{KS'}\ \ m\ddot{\vec{r}} = -m\vec{b}$$

dabei nennt man $m\vec{b}$ „Scheinkraft", da sie ja nicht wirklich aufgebracht wird.

2.6.2 Rotierendes Bezugssytem

KS' wird gegegnüber IS um einen Winkel φ gedreht (mit fester z-Achse). Dann kann man definieren:

- Winkelgeschwindigkeit $\omega := \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$
- Vektor der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \omega\hat{\omega}$ mit $\hat{\omega}$, dem Einheitsvektor in ω-Richtung

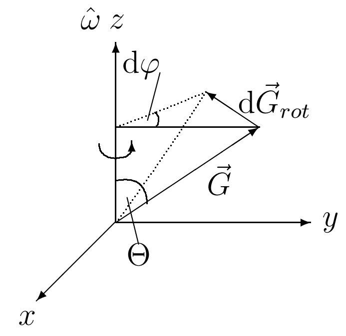

Abbildung 2.5: konstanter Vektor $\vec{G}$ im gedrehten Bezugssystem KS', betrachtet aus dem Inertialsystem IS

Betrachtet man nun von IS aus einen Vektor $\vec{G}$, der in KS' fest, also konstant ist, so ergibt sich dessen Änderung bei einer Drehung d$\vec{G}_{rot}$ zu (s. Abb. 2.5)

$$\mathrm{d}\vec{G}_{rot} = \mathrm{d}\varphi\hat{\omega} \times \vec{G} = \vec{\omega} \times \vec{G}\mathrm{d}t$$

Daraus läßt sich die „allgemeine Transformationsgleichung“ ableiten:

$$\boxed{\mathrm{d}\vec{G}_{IS} = \mathrm{d}\vec{G}_{KS'} + [\vec{\omega} \times \vec{G}(t)]\mathrm{d}t} \tag{2.6}$$

Bei dieser Transformationsgleichung ist zu beachten, daß man nur Koordinaten einsetzen darf, die denselben „Ursprung“ haben, d.h. man könnte z.B. alle Koordinaten in Bezug auf das Inertialsystem betrachtet einsetzen, mit ihnen dann die Transformation ausführen und sie dann letztlich in das KS' durch die normale Galilei-Transformation überführen. Auch der umgekehrte Weg (erst Galilei-Transformation, dann konsequent mit den galileitransformierten Vektoren in die Transformationsgleichung eingehen) ist korrekt. „Mischungen“, wie z.B. auf der linken Seite Koordinaten bez. IS, auf der rechten die schon galileitransformierten Koordinaten des KS' führen i.a. zu falschen Ergebnissen !!!

2 Beispiele: 1. Geschwindigkeit. Man muß $\vec{r}'(t)$ in die Transformationsgleichung (2.6) einsetzen und erhält

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'(t) \tag{2.7}$$

2. Beschleunigung. Dazu setzt man (2.7) in die Transformationsgleichung (2.6) ein:

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}' + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}'(t) + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}'(t) + \vec{\omega}[\dot{\vec{r}}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'] \tag{2.8}$$

2.6.3 Kräftefreies Teilchen im rotierenden System

im IS gilt

$$m\ddot{\vec{r}} = 0$$

mit Gl. (2.8) ergibt sich für das rotierende System

$$m\ddot{\vec{r}} = \underbrace{-2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}'}_{\text{Coriolis-Kraft}} - \underbrace{m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')}_{\text{Zentrifugalkraft}} - \underbrace{m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}'}_{\substack{\text{Trägheitskraft}\\ \text{falls } \dot{\vec{\omega}} \neq 0}}$$

- Zentrifugalkraft
  Richtung: $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\omega}(\underbrace{\vec{\omega} \cdot \vec{r}'}_{=0}) - \vec{r}'\vec{\omega}^2$. Die Zentrifugalkraft steht also senkrecht auf $\vec{\omega}$ und zeigt radial nach außen.
  Betrag: $\omega r' \sin(\vec{\omega}, \vec{r})$
- Coriolis-Kraft
  Richtung: senkrecht zu $\vec{\omega}$ und $\vec{v}'$.
  Betrag: $2m\omega v' \sin(\vec{\omega}, \vec{v}')$

Ein Beispiel für die Coriolis-Kraft ist die Windbewegung auf der rotierenden Erdhalbkugel. Der Wind weht somit auf der Nordhalbkugel vorzugsweise nach Westen, auf der Südhalbkugel nach Osten.

Kapitel 3

Lagrange Mechanik

3.1 Lagrangegleichungen 1. Art

Man kann viele Beispiel aus der Mechanik mit Hilfe von sog. „Zwangsbedingungen„beschreiben. Ein Beispiel hierfür sei das mathematische Pendel (s. Abb. 3.1). Die Zwangsbedingung lautet hier:

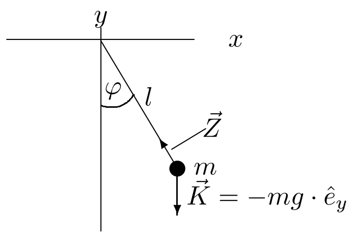

Abbildung 3.1: Ebenes mathematisches Pendel. Auf die Masse m wirkt die Schwerkraft $\vec{K}$ und eine durch den Faden ausgeübte unbekannte Zwangskraft $\vec{Z}$.

$$\begin{aligned} g(\vec{r}) &= x^2 + y^2 - l^2 = 0 \\ m\ddot{\vec{r}} &= \vec{K} + \vec{Z} \end{aligned} \tag{3.1}$$

$\vec{Z}$ nennt man Zwangskraft, sie wird bei dem math. Pendel, wie in Abb. 3.1 beschrieben, vom Faden aufgebracht und weist in Richtung des Aufhängepunktes.

Bei der Zwangsbedingung g sind zwei Typen zu unterscheiden:

- $g = g(\vec{r}, t) = 0$ nennt man „holonome“ Zwangsbedingung.
- alle anderen „nichtholonom“ (z.B. Ungleichungen oder Abhängigkeiten von g nicht nur von $\vec{r}$ und t)

Die Zwangskraft $\vec{Z}$ wirkt immer senkrecht zur Fläche (da sie keine Komponente in der durch g definierten „Fläche“ haben darf, um die eigentliche Bewegung nicht zu “stören“), die durch die Zwangsbedingung $g(\vec{r},t)$ gegeben ist:

$$\vec{Z}(\vec{r},t) = \lambda(t) \cdot \vec{\nabla} g(\vec{r},t)$$

Daß der Gradient senkrecht zu der durch $g = 0$ gegebenen Fläche steht, kann man sich verdeutlichen, indem man den Gradienten in Komponenten parallel und senkrecht zur „Fläche“ zerlegt. Da sich aber g in der Fläche nicht ändern darf (wegen $g = 0\ \forall \vec{r}$), muß die parallele Komponente verschwinden und der Gradient behält nur noch eine senkrechte Komponente.

Setzt man nun (3.2) in Gl. (3.1) ein, ergibt sich folgendes Gleichungssystem

$$\begin{aligned} m\ddot{\vec{r}} &= \vec{K} + \lambda(t) \cdot \vec{\nabla} g(\vec{r},t) \qquad (3.2) \\ g(\vec{r},t) &= 0 \end{aligned}$$

Man erhält somit also 4 (allgemein $3 \cdot N + R$ mit $R =$ Anzahl der Zwangsbedingungen) Gleichungen für die Variablen $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ und $\lambda(t)$.

Dies sei noch einmal am Beispiel des Pendel verdeutlicht

$$\vec{r} = (x,y,0) \qquad \vec{\nabla} g = 2(x,y,0) = 2\vec{r}$$

Damit ergibt sich also

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= 2\lambda x \\ m\ddot{y} &= -mg + 2\lambda y \\ x^2 - y^2 &= l^2 \end{aligned}$$

Verallgemeinert man Gleichung (3.2) auf N Teilchen mit R Zwangsbedingungen ($R \leq 3N - 1$), so ergeben sich die allgemeinen Lagrange-Gleichungen 1. Ordnung

$$\begin{gathered} m_n \ddot{\vec{r}}_n = \vec{K}_n + \sum_{\alpha=1}^{R} \lambda_\alpha(t) \cdot \vec{\nabla} g_\alpha(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N, t) \qquad (n = 1, \ldots, N) \qquad (3.3) \\ g_\alpha(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N, t) = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, R) \end{gathered}$$

3.2 Lagrangegleichungen 2. Art

Die Lagrangegleichungen 2. Art unterscheiden sich von denen der 1. Art durch das Verschwinden der Zwangskräft durch geeignete Koordinatenwahl, den sog. „verallgemeinerten Koordinaten“. Die Anzahl der Freiheitsgrade gibt an, wieviele der verallgemeinerten Koordinaten voneinander unabhängig sind, sie ergibt sich bei $3N$ Koordinaten und R Zwangsbedingungen zu

$$f = 3N - R$$

Somit kann man nun also f verallgemeinerte oder generalisierte Koordinaten

$$q_1, q_2, \ldots, q_f$$

so wählen, das man mit ihnen die Lage aller Massenpunkte beschreiben kann

$$\vec{r}_n = \vec{r}_1(q_1, q_2, \ldots, q_f, t).$$

Die r_n liegen (aufgrund der „geigneten“ Koordinatenwahl) alle auf den durch die Zwangsbedingungen festgelegten Flächen, d.h. die Zwangsbedingungen müssen für beliebige Werte der q_n erfüllt sein:

$$g_\alpha = (\vec{r}_1(q_1, \ldots, q_f, t), \ldots, \vec{r}_N(q_1, \ldots, q_f, t)) \equiv 0 \text{ (!)}$$

Aus der Tatsache, daß $g_\alpha = 0\ \forall q_i$ ist (also $g_\alpha \equiv 0$), folgt

$$\frac{\partial g_\alpha}{\partial q_i} = 0 \overset{\text{Kettenregel}}{\Leftrightarrow} \sum_{n=1}^{R} \vec{\nabla}_n g_\alpha \cdot \frac{\partial \vec{r}_n}{\partial q_i} = 0$$

Dies Erkenntnis wird nun ausgenutzt, um die Zwangskräfte zu eliminieren: Mutlipliziert man Gleichung (3.3) mit $\partial\vec{r}_n/\partial q_i$ durch und summiert über n dieser Bewegungsgleichungen auf, erhält man

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_n (m_n \ddot{\vec{r}}_n - \vec{K}_n - \underbrace{\sum_{\alpha=1}^{R} \lambda_\alpha \vec{\nabla}_n g_\alpha) \cdot \frac{\partial \vec{r}_n}{\partial q_i}}_{=0 \text{ s.o.}} \\ &= \sum_n (m_n \ddot{\vec{r}}_n - \vec{K}_n) \cdot \frac{\partial \vec{r}_n}{\partial q_i}. \end{aligned}$$

In dieser letzten Zeile sind die Zwangskräfte verschwunden!
Man sollt noch erwähnen, daß man

$$\vec{Q}_k = \vec{K}_n \cdot \frac{\partial \vec{r}_n}{\partial q_i}$$

als „verallgemeinerte Kraft“ bezeichnet. Betrachtet man nun nochmals die Transformation

$$\vec{r}_n = \vec{r}_n(q_1, \ldots, q_f, t),$$

so ergibt sich durch einfaches Differenzieren folgende, wichtige Beziehung:

$$\Longrightarrow \dot{\vec{r}}_n = \frac{\partial \vec{r}_n}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial \vec{r}_n}{\partial q_i} \cdot \dot{q}_i$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{\partial \dot{\vec{r}}_n}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \vec{r}_n}{\partial q_i}} \tag{3.4}$$

Multipliziert man nun die Newton'sche Bewegungsgleichung mit $\partial\vec{r}_n/\partial q_i$ durch und summiert über n, ergibt sich

$$\begin{aligned}\sum_n m_n\ddot{\vec{r}}_n\cdot\frac{\partial\vec{r}_n}{\partial q_i} &\overset{(3.4)}{=} \sum_n m_n\ddot{\vec{r}}_n\frac{\partial\dot{\vec{r}}_n}{\partial\dot{q}_i} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial}{\partial\dot{q}_i}\sum_n\frac{1}{2}m_n\dot{\vec{r}}_n^{\,2}\right) - \frac{\partial}{\partial q_i}\sum_n\frac{1}{2}m_n\dot{\vec{r}}_n^{\,2}\\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial}{\partial\dot{q}_i}T\right) - \frac{\partial}{\partial q_i}T \qquad (3.5)\end{aligned}$$

dabei ist $T=\sum_n\frac{1}{2}m_n\dot{\vec{r}}_n^{\,2}$ die kinetische Energie . Die vorletzte Umformung in obiger Gleichung ergibt sich aus

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial}{\partial\dot{q}_i}\sum_n\frac{1}{2}m_n\dot{\vec{r}}_n^{\,2}\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_n m_n\dot{\vec{r}}_n\cdot\frac{\partial\dot{\vec{r}}_n}{\partial\dot{q}_i}\right) \overset{(3.4)}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_n m_n\dot{\vec{r}}_n\cdot\frac{\partial\vec{r}_n}{\partial q_i}\right)\\ &= \sum_n m_n\ddot{\vec{r}}_n\frac{\partial\vec{r}_n}{\partial q_i} + \sum_n m_n\dot{\vec{r}}_n\frac{\partial\dot{\vec{r}}_n}{\partial q_i}.\end{aligned}$$

Dies Umformungen kann man wiederum durch einige Rechnerei verstehen.

Setzt man weiterhin konservative Kräfte voraus

$$\vec{K}_n = -\vec{\nabla}U(\vec{r}_1(q,t),\ldots,\vec{r}_n(q,t)),$$

so ergibt sich

$$\sum_n m_n\ddot{\vec{r}}_n\frac{\partial\vec{r}_n}{\partial q_i} = \sum_n\vec{K}_n\frac{\partial\vec{r}_n}{\partial q_i} = -\sum_n\vec{\nabla}_n U(\vec{r}(q))\cdot\frac{\partial\vec{r}_n}{\partial q_i} = -\frac{\partial}{\partial q_i}U(q(\vec{r})).$$

Die letze Umformung ergibt sich aus der Kettenregel. Damit erhält man aus (3.5) folgendes

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial}{\partial\dot{q}_i}T\right) - \frac{\partial}{\partial q_i}(T-U)\,.$$

Daraus erhält man nun mit $\partial U/\partial\dot{q}_i = 0$ (da nur konservative Kräfte zugelassen waren und somit das Potential nicht von den Geschwindigkeiten abhängen kann)

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial}{\partial\dot{q}_i}\mathcal{L}\right) - \frac{\partial}{\partial q_i}\mathcal{L} = 0} \qquad (3.6)$$

Dabei nennt man $\mathcal{L}=T-U$ die „Lagrange-Funktion“, mit deren Hilfe man gewisse Probleme einfacher fassen kann. Aus der Lagrange-Funktion lassen sich nun die Lagrange-Bewegungsgleichungen 2. Art aufstellen, indem man einfach U und T durch die verallgemeinerten Koordinaten ausdrückt und die jeweiligen Ableitungen einsetzt. Man erhält somit f Bewegungsgleichungen, die es zu verarbeiten gilt.

Der große Vorteil dieser Formulierung gegenüber den Lagrangegleichungen 1. Art besteht darin, daß man erstens nur $3N-R$ statt $3N+R$ Gleichungen zu lösen hat und zweitens die Zwangskräfte nicht mehr berücksichtigen und somit auch nicht mehr ausrechnen muß.

3.3 Ableitung der Erhaltungsgrößen

3.3.1 Energieerhaltung

Unter der Annahme,daß $\mathcal{L}$ nicht explizit zeitabhängig ist ($\partial\mathcal{L}/\partial t = 0$), ergibt sich:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{L} &= \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}\right) + \sum_{i=1}^{f}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i}\cdot\dot{q}_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\ddot{q}_i\right) = \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}\right) + \sum_{i=1}^{f}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\right)\cdot\dot{q}_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\cdot\ddot{q}_i\right) \\ &= \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{i=1}^{f}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\cdot\dot{q}_i\right) \qquad \left(\text{mit } \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}\right)\equiv 0\right)\end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\Longrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H = 0; \quad \text{mit } H = -\mathcal{L} + \sum_{i=1}^{f}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\cdot\dot{q}_i = konst.$$

Sind nun 1. die Zwangsbedingungen nicht explizit zeitabhängig

$$T \overset{?}{=} \sum_{i,j} a_{ij}\cdot\dot{q}_i\cdot\dot{q}_j = T(q,\dot{q},t),$$

ist 2. $U = U(q) \Longrightarrow \frac{\partial U}{\partial\dot{q}} = 0$

$$\sum_{i=1}^{f}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\cdot\dot{q}_i = \sum_{i=1}^{f}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i}\cdot\dot{q}_i = 2T,$$

so ergibt sich aus 1., 2.

$$\Longrightarrow H = -T + U + 2T = T + U = E$$

H nennt man „Hamilton-Funktion“.

3.3.2 zyklische Koordinaten, verallgemeinerter Impuls

Wenn die Lagrangefunktion nicht explizit von einer best. Koordinate abhängt, wenn also

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_k} = 0$$

gilt, so nennt man diese Koordinate q_k zyklisch. Man erhält

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_k}\right) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_k} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_k} = konst. =: p_k.$$

Dabei nennt man p_k den verallgemeinerten Impuls.
Beispiele: 1. freies Teilchen mit $T = \frac{1}{2}mv^2$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^{\,2} \Longrightarrow \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vec{r}} = 0 \\ \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\vec{r}}}\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\dot{\vec{r}}) = 0 \Longrightarrow \vec{p} = m\dot{\vec{r}} = konst.\end{aligned}$$

2. Massenpunkt auf Kreisbahn

$$\mathcal{L} = \tfrac{m}{2} l^2 \dot\varphi^2 \Longrightarrow \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\tfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_i}\right) = \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(l^2 \dot\varphi m) = 0$$
$$\Longrightarrow L_z = m l^2 \dot\varphi = konst.$$

L_z ist die z-Komponente des Drehimpulses, die erhalten bleibt.

3.4 Lagrange-Funktion mit nichtkonservativen Kräften

Bisher gingen wir davon aus, daß die Potentiale, die wir in die Lagrange-Funktion einsetzen, unabhängig von $\dot q_i$, also geschwindigkeitsunabhängig sind. Mit diesem Ansatz kann man allerdings das Verhalten von Teilchen in $\vec B$-Feldern nicht beschreiben. Im folgenden wird nun beschrieben, wie man eine Lagrange-Funktion aufstellt mit einem Potential $U = U(q, \vec r, \dot{\vec r})$.

3.4.1 elektromagnetische Kräfte

Es seien elektromagnetische Kräfte vorhanden, $\vec E :=$ el. Feld, $\vec B :=$ Magnetfeld, q Ladung.

$$\vec K = q\vec E + \frac{q}{c} \cdot \dot{\vec r} \times \vec B$$

Annahme einer geschwindigkeitsabhängigen Potentialfunktion $U(\vec r, \dot{\vec r}, t)$:

$$\leadsto \mathcal{L} = T - U \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec r}}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\vec r}} - \frac{\partial U}{\partial \dot{\vec r}}\right) \stackrel{(3.4)}{=} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec r}$$

Soweit wenig Neues, es stellt sich nun die Frage, wie U gewählt werden muß, damit sich $\vec K = m\ddot{\vec r}$ aus U ergibt.

Führt man die el. Potentiale ϕ und $\vec A$ ein, ergibt sich

$$\begin{aligned} \vec E &= -\underbrace{\vec\nabla \phi}_{\text{wegen } \vec\nabla \times E = 0} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec A}{\partial t} \\ \vec B &= \underbrace{\vec\nabla \times \vec A}_{\text{wegen } \vec\nabla \cdot \vec B = 0} . \end{aligned} \tag{3.8}$$

Man erhält also für den nichtkonservativen Anteil von U:

$$U_{n.k.} = -\frac{q}{c} \dot{\vec r} \vec A(\vec r, t)$$

Somit erhält man also Kraft und Potential als

$$\begin{aligned}
U(\vec{r},\dot{\vec{r}},t) &= q\cdot\phi(\vec{r},t)+U_{n.k.} \\
\Longrightarrow \vec{K} &= -\vec{\nabla}U+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial U}{\partial\dot{\vec{r}}}\right) \\
&= -q\vec{\nabla}\phi+\frac{q}{c}\sum_{j=1}^{3}\left(\dot{x}_j\vec{\nabla}A_j(\vec{r},t)\right)-\frac{q}{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{A}(\vec{r},t) \\
&\overset{(3.8)}{=} q\cdot\vec{E}+\frac{q}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-\frac{q}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}+\frac{q}{c}\underbrace{\sum_{j=1}^{3}\left(\dot{x}_j\vec{\nabla}A_j-\frac{\partial\vec{A}}{\partial x_j}\cdot\dot{x}_j\right)}_{=\dot{\vec{r}}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})}
\end{aligned}$$

Das obige Kreuzprodukt ergibt sich aus dem Entwicklungssatz

$$\vec{b}(\vec{a}\vec{c})-\vec{c}(\vec{a}\vec{b})=\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}).$$

Somit ergibt sich die Lagrangefunktion für nichtkonservative Kräfte zu

$$\boxed{\mathcal{L}(\vec{r},\dot{\vec{r}},t)=\tfrac{m}{2}\dot{\vec{r}}^{2}-q\cdot\phi(\vec{r},t)+\tfrac{q}{c}\cdot\dot{\vec{r}}\cdot\vec{A}(\vec{r},t)} \tag{3.9}$$

3.4.2 Reibungskräfte

Reibungskräfte sind dissipative Kräfte und i.a. (bei uns) linear abhängig von der Geschwindigkeit des jeweiligen Teilchens:

$$\vec{K}_{diss}=-\gamma_n\cdot\dot{\vec{r}}_n$$

beschreibt die Reibungskraft des n-ten Teilchens. Man muß also der Lagrange-Funktion Terme hinzufügen, die die verallgemeinerten Kräfte

$$Q_{diss,k}=\sum_{n=1}^{N}\vec{K}_{diss,n}\cdot\frac{\partial\vec{r}_n}{\partial\dot{q}_i}$$

berücksichtigen. Die wird erreicht durch Einführung der „Rayleigh'schen Dissipationsfunktion“ erreicht.

$$\begin{aligned}
F(\dot{\vec{r}}) &:= \textstyle\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2}\gamma_n\cdot\dot{\vec{r}}_n^{2} \\
\Longrightarrow F(q,\dot{q},t) &= \textstyle\sum_{n=1}^{N}\frac{\gamma_n}{2}\dot{\vec{r}}_n^{2}(q,\dot{q},t).
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich für die verallgemeinerten Kräfte

$$Q_{diss,k}=-\sum_{n=1}^{N}\frac{\partial F}{\partial\dot{\vec{r}}_n}\cdot\frac{\partial\vec{r}_n}{\partial q_i}\overset{(3.4)}{=}-\sum_{n=1}^{N}\frac{\partial F(\vec{r}(q))}{\partial\dot{\vec{r}}_n}\cdot\frac{\partial\dot{\vec{r}}_n}{\partial\dot{q}_i}=-\frac{\partial F(q(\vec{r}))}{\partial\dot{q}_i}.$$

Und damit ergeben sich die Lagrangegleichungen 2. Art unter Beachtung der Reibungskräfte zu

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

Hieraus kann man erkennen, daß die Rayleigh'sche Dissipationsfunktion der halben Leistung, die gegen die Reibung aufgebracht werden muß, entspricht, denn die Verschiebungsarbeit um eine Strecke dr ergibt sich aus

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \sum_{n=1}^{N} K_{diss,n} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{r}_n}{\mathrm{d}t}.$$

Kapitel 4

Variationsrechnung der Mechanik

4.1 Variation ohne Nebenbedingung

Hat man Funktionen $y = y(x)$ gegeben, die der Bedingung

$$J = J[y] := \int\limits_{x_1}^{x_2} F(y, y', x)\mathrm{d}x = \text{minimal} \tag{4.1}$$

genügen sollen, so nennt man $J[y]$ „Funktional“ von $y(x)$.

Die Randbedingungen für obiges Problen lauten $y(x_1) = y_1, y(x_2) = y_2$ mit festen y_1, y_2. (s. z.B. Problem der Brachistochrone).

Man nimmt nun an, daß $y_0(x)$ die gesuchte Funktion sei und betrachtet folgendes

$$y(x) = y_0(x) + \varepsilon \cdot \eta(x) \tag{4.2}$$

mit einem infinitesimalen ε und einem bel. $\eta(x)$, welches nur an den Randpunkten der Bedingung $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ genügen muß, da sonst die Randbedingungen nicht erfüllt sind.

(Das ε wird eingeführt, damit man unten zeigen kann, daß das Funktional minimal wird, für die „Lösung“ $y_0(x)$. Dazu läßt man dann letztlich das ε gegen Null gehen und erhält somit die Bedingungen (Euler'schen Gleichungen), die das $y_0(x)$ erfüllen muß, um eine „Lösung“ des Funktionals zu sein.)

Setzt man nun also (4.2) in J ein, erhält man (wegen $y_0(x) =$ „konst“)

$$J[y] = J\left([\eta(x)], \varepsilon\right), \tag{4.3}$$

welches nun nur noch von ε und $\eta(x)$ abhängt.

Gibt man sich nun ein $\eta(x)$ vor (welches nur dahingehend eingeschränkt ist, daß es die Randbedingungen nicht verletzen darf), so muß also wegen (4.1) $J(\varepsilon)$ minimal werden, also

$$\Longrightarrow \frac{\partial J}{\partial \varepsilon} = 0.$$

Man bildet also nun

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon} J[y_0(x) + \varepsilon\eta(x)]\right|_{\varepsilon=0} \tag{4.4}$$

Das $\varepsilon = 0$ bedeutet nur, daß im weiteren Verlauf das ε verschwinden muß, um zu gewährleisten, daß man eine von ε unabhängige Bedingung für $y(x)$ bekommt.

Setzt man nun (4.2) für y in (4.1) ein und führt (4.4) aus, erhält man

$$(4.4) = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \cdot \eta(x) + \frac{\partial F}{\partial y'} \cdot \eta'(x) + 0 \right) \cdot \mathrm{d}x. \tag{4.5}$$

Wenn man jetzt den vorderen Term von (4.5) beibehält und den hinteren partiell integriert, erhält man

$$\begin{aligned} (4.5) \quad &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y}\eta(x)\mathrm{d}x + \underbrace{\left[\frac{\partial F}{\partial y'}\eta(x)\right]_{x_1}^{x_2}}_{=0,\ \text{da}\ \eta(x_1)=\eta(x_2)=0} - \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\eta(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\eta(x)\mathrm{d}x = 0. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Da das $\eta(x)$ beliebig sein soll, insbes. also gelten kann $\eta(x) \neq 0$, folgt aus (4.6), daß die Klammer Null werden muß.

Setzt man nun $\varepsilon = 0$ ein (um das η und eben das ε im Argument der Funktion F verschwinden zu lassen), erhält man folgenden Ausdruck

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0}\,. \tag{4.7}$$

Diese Gleichung nennt man die „Euler'sche Differentialgleichung der Variationsrechnung“.

Die Kurznotation der Schritte (4.1) - (4.7) lautet:

$$\begin{aligned} \delta J = J[y+\delta y] - J[y] = \textstyle\int \left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right)\mathrm{d}x \overset{p.I.}{=} \int \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\delta y = 0 \\ \rightsquigarrow \frac{\delta J}{\delta y} = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'}, \end{aligned} \tag{4.8}$$

dabei nennt man $\delta J/\delta y$ die „Funktionalableitung“.

4.1.1 Variation mit Nebenbedingung

Ein Beispiel zur Motivation:

Ein Kette konstanter Massendichte ϱ der Länge L befinde sich im Schwerefeld der Erde, die Aufhängepunkte seien P_1 und P_2 (s. Abb. 4.1).

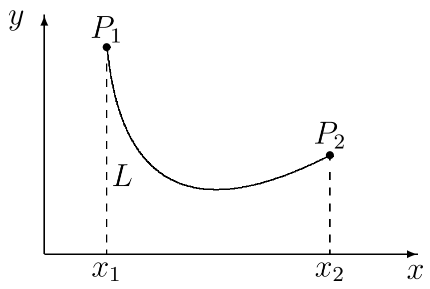

Abbildung 4.1: Kette mit Länge L im Schwerefeld der Erde

In diesem Fall ist $J = U_{pot}$ die potentielle Energie:

$$J = \int_{P_1}^{P_2} g \cdot \varrho \cdot y \mathrm{d}s \overset{\mathrm{d}s = |\dot{\gamma}|\mathrm{d}t}{=} g \cdot \varrho \int_{x_1}^{x_2} y(x)\sqrt{1 + y'^2}\mathrm{d}x$$

mit s, der (Bogen)länge der Kette und γ, einem Weg, der die Lage der Kette parametrisiert.

Ein Element der Bogenlänge ergibt sich also zu

$$\mathrm{d}s = \sqrt{1 + y'^2}\mathrm{d}x.$$

Damit erhält man als Nebenbedingung

$$K[y] := \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2}\mathrm{d}x = L. \tag{4.9}$$

Das ist die sog. „isoperimetrische Nebenbedingung“

4.1.2 Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren

Um das in Abschnitt 4.1.1 angesprochene Problem zu lösen, führt man die sog. Lagrange'schen Multiplikatoren λ ein. Man definiert sich erst einmal

$$J^*[y, \lambda] = J[y] - \lambda(K[y] - L) = \text{ minimal} \tag{4.10}$$

Man kann leicht erkennen, daß man zum „normalen“ Funktional einfach 0 dazugezählt hat (wegen (4.9)).

Man hat nun 2 Extremalbedingungen für J^* zu erfüllen:

$$1. \qquad \frac{\delta J^*}{\delta y} = \frac{\delta J}{\delta y} - \lambda \frac{\delta K}{\delta y} = 0 \tag{4.11}$$

$$2. \qquad \frac{\delta J^*}{\delta \lambda} = K[y] - L = 0$$

Da J und K Funktionale sein sollen, erhält man

$$J[y] = \int\limits_{x_1}^{x_2} F(y, y', x)\mathrm{d}x; \qquad K[y] = \int\limits_{x_1}^{x_2} G(y, y', x)\mathrm{d}x$$

Man bildet nun „einfach" die Funktionalableitung gemäß Gl. (4.11) und (4.8) und erhält die sog. verallgemeinerte Eulergleichung:

$$\frac{\delta J^*}{\delta y} = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'} - \lambda\frac{\partial G}{\partial y} + \lambda\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial G}{\partial y'} = 0 \tag{4.12}$$

Der Beweis dieser Gl. (4.12) ergibt sich analog dem von Variationen ohne Nebenbedingungen. Man nimmt an,

$$y(x) = y_0(x) + \varepsilon_1 \cdot \eta_1(x) + \varepsilon_2 \cdot \eta_2(x) \tag{4.13}$$

sei eine „Lösung" der beiden Funktionale. Daraus ergibt sich analog

$$K[y(x)] = konst. = K(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \tag{4.14}$$

Diese Gleichung beschreibt, bei gegebenen $\eta_1(x), \eta_2(x)$ eine Kurve in der $\varepsilon_1, \varepsilon_2$-Ebene, die aufgrund der Randbedingungen durch den Nullpunkt gehen muß. Entsprechend erhält man aus dem Funktional J

$$\begin{aligned} K[y(x)] &= J(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \text{minimal} \quad \text{für } \varepsilon_1, \varepsilon_2 \neq 0 \\ \Longrightarrow \frac{\partial J}{\partial \varepsilon_1} &= \frac{\partial J}{\partial \varepsilon_2} = 0. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Drückt man nun noch ε_2 durch ε_1 aus, ergibt sich

$$\frac{\partial J(\varepsilon_1, \varepsilon_1(\varepsilon_2))}{\partial \varepsilon_1} = \frac{\partial J}{\partial \varepsilon_1} + \frac{\partial J}{\partial \varepsilon_2} \cdot \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial \varepsilon_1} = 0. \tag{4.16}$$

mit $K - konst = 0$ erhält man

$$K - konst. = 0 \Longrightarrow \frac{\partial K}{\partial \varepsilon_1}\mathrm{d}\varepsilon_1 + \frac{\partial K}{\partial \varepsilon_2}\mathrm{d}\varepsilon_2 = 0 \Longrightarrow \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \varepsilon_2} = -\frac{\left(\frac{\partial K}{\partial \varepsilon_1}\right)}{\left(\frac{\partial K}{\partial \varepsilon_2}\right)}. \tag{4.17}$$

Setzt man nun (4.17) in (4.16) ein, folgt

$$\frac{\partial J}{\partial \varepsilon_1} - \frac{J}{\varepsilon_2} \cdot \frac{\left(\frac{\partial K}{\partial \varepsilon_1}\right)}{\left(\frac{\partial K}{\partial \varepsilon_2}\right)} = 0 \tag{4.18}$$

Aus dem oben definierten Funktional J^* erhält man

$$J^*[y(x)] = J^*(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial J^*}{\partial \varepsilon_1} = \frac{\partial J}{\partial \varepsilon_1} - \lambda\frac{\partial K}{\partial \varepsilon_1} = 0 \\ \frac{\partial J^*}{\partial \varepsilon_2} = \frac{\partial J}{\partial \varepsilon_2} - \lambda\frac{\partial K}{\partial \varepsilon_2} = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{\partial J}{\partial \varepsilon_1} - \frac{\partial J}{\partial \varepsilon_2} \cdot \frac{\left(\frac{\partial K}{\partial \varepsilon_1}\right)}{\left(\frac{\partial K}{\partial \varepsilon_2}\right)} = 0 \tag{4.19}$$

Durch Umformumg nach λ konnte man selbiges aus obigen Gleichungen eliminieren und somit die Gleichung erhalten, die man auch auf dem „normalen" Weg erhalten hätte.

4.2 Hamilton'sches Prinzip

4.2.1 Lagrange'sche Gleichgungen 2. Art

Wir wollen noch einmal die Lagrange'schen Gleichungen 2. Art betrachten. Sie lauten (s. 3.6)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\right)-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i}=0 \qquad i=1,2,\ldots,f$$

Man kann leicht erkennen, daß sie eine mit den Eulergleichungen vergleichbare Struktur besitzen. Identifiziert man in (4.7) $\mathcal{L}(q,\dot{q},t)$ mit $F(y,y',x)$, q mit y, $\dot{q}$ mit y' und t mit x, so erhält man

$$S:=\int\limits_{t_1}^{t_2}\mathcal{L}(q,\dot{q},t)\mathrm{d}t=\text{stationär}. \tag{4.20}$$

Das Funktional S nennt man „Wirkung". Die Aussage, daß S minimal werden soll nennt man „Hamilton'sches Prinzip" oder „Prinzip der kleinsten Wirkung". Die Bewegungsgleichungen sind nun einfach die $q(t)$, die die kleinste Wirkung nach sich ziehen. (Die Bewegungsgleichungen sind die Eulergleichungen für $\mathcal{L}$)

Eine wichtige Tatsache, die ebenfalls aus der Variationsrechnung stammt, ist, daß die Lagrangefunktion unbestimmt bezüglich der Addition einer beliebigen totalen Zeitableitung ist, denn aus

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &\longrightarrow \mathcal{L}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(q,t)\\ \Longrightarrow S &\longrightarrow S+\underbrace{f(q(t_2),t_2)-f(1(t_1),t_1)}_{=konst}=S+konst.\end{aligned}$$

ergibt sich, daß sich die Bewegungsgleichungen nicht ändern, da eine bel. Konstante bei der Variation von S verschwindet.
Beispiele zu diesem letzen Punkt:

- Galileitransformation mit konstanter Verschiebungsgeschwindigkeit $\vec{v}$:

  $$\dot{\vec{r}}=\dot{\vec{r}}+\vec{v}.$$

  Die Abstände $|\vec{r}_n-\vec{r}_m|$ der Teilchen sind invariant, was ein invariantes Potential zur Folge hat. Die kinetische Energie ergibt sich zu

  $$\begin{gathered}\tfrac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2\longrightarrow\tfrac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2+m\dot{\vec{r}}\vec{v}+\tfrac{m}{2}\vec{v}^2\\ \mathcal{L}\longrightarrow\mathcal{L}+m\vec{v}\dot{\vec{r}}+\tfrac{m}{2}\vec{v}^2=\mathcal{L}+\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underbrace{(m\vec{r}\vec{v}+\frac{m}{2}\vec{v}^2\cdot t)}_{=f}\end{gathered}$$

  Daraus ergibt sich (s.o.) die Invarianz der Bewegungsgleichungen.

- Eichinvarianz im elektromagnetischen Feld:

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0) \Longrightarrow \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$
$$(\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\tfrac{1}{c} \cdot \tfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}) \Longrightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \tfrac{1}{c}\tfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Die Potentiale $\phi, \vec{A}$ sind nur bis auf eine „Eichtransformation“ bestimmt.

$$\vec{A} = \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda, \quad \phi = \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \Lambda}{\partial t} \qquad \text{(Eichtransformation)} \tag{4.21}$$

Die Lagrangefunktion ist „offensichtlich“ nicht eichinvariant:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 - q \cdot \phi + \frac{q}{c} \cdot \dot{\vec{r}}\vec{A} \longrightarrow \qquad & \mathcal{L} + \frac{q}{c}\frac{\partial \Lambda}{\partial t} + \frac{q}{c} \cdot \dot{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla}\Lambda \\ = \quad & \mathcal{L} + \frac{q}{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Lambda(\vec{r}, t) \end{aligned}$$

Damit ergibt sich wiederum die Invarianz der Bewegungsgleichungen.

4.2.2 Lagrange'sche Gleichungen 1. Art

Auch die Lagrange-Gleichungen 1. Art (s. 3.1) lassen sich als Funktional darstellen. Man hat wieder eine Nebenbedingung

$$g_\alpha(x, t) = 0, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, R$$
$$\Longrightarrow S^*(x, \lambda, t) = \int_{t_1}^{t_2} [\mathcal{L}(x, \dot{x}, t) + \sum_{\alpha=1}^{R} \lambda_\alpha(t) g_\alpha(x, t)] \mathrm{d}t$$

Nimmt man jetzt die „unbeschränkte Variation“ von S^* vor, ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\delta S^*}{\delta \lambda_\alpha(t)} &= 0 = g_\alpha(t) \\ \frac{\delta S^*}{\delta x} &= 0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} + \sum_{\alpha=1}^{R} \lambda_\alpha \cdot \frac{\partial g_\alpha}{\partial x}\right) \end{aligned}$$

Zu der Lagrange-Gleichung 2. Art ist also einfach ein Zusatzterm, der den Zwangskräften (s. 3.1) entspricht hinzugekommen.

4.3 Noethertheorem

Das Noethertheorem wird uns in die Lage versetzen, aus Symmetrien des Systems versch. Erhaltungsgrößen zu bestimmen. Es wird eine allgemeine Klasse von Symmetrieoperationen bzw. -transformationen betrachtet:

$$\begin{aligned} x_i &\longrightarrow x_i^* = x_i + \varepsilon \Psi_i(x, \dot{x}, t) \\ t &\longrightarrow t^* = t + \varepsilon \varphi(x, \dot{x}, t) \end{aligned} \tag{4.22}$$

Dabei soll ε eine infinitesimale Größe sein (die sich dann später gut zum Entwickeln eignet).
Beispiele:

- Zeittranslation: $t^* = t + \varepsilon \qquad x^* = x$
- räumliche Translation: $x_i^* = x_i + \varepsilon,\ (i \parallel \hat{x}) \qquad t^* = t$
- Galileitransformation: $\vec{r}^* = \vec{r} + \varepsilon \cdot \hat{v} \cdot t \qquad t^* = t$
- Drehung: $\vec{r}^* = \vec{r} + \varepsilon \hat{\omega} \times \vec{r} \qquad t^* = t$

Es folgt ein Vergleich der transformierten Wirkung

$$S^* = \int\limits_{t_1^*}^{t_2^*} \mathcal{L}(x^*, \dot{x}^*, t^*) \mathrm{d}t^*$$

mit den transformierten Randbedingungen

$$x_i^*(t_{\frac{1}{2}})^* = x_i(t_{\frac{1}{2}}) + \varepsilon \Psi_i(x(t_{\frac{1}{2}}), \dot{x}(t_{\frac{1}{2}}), t_{\frac{1}{2}})$$

mit der „normalen“ Wirkung S. Falls $S^* = S$ gilt, ist die Wirkung <u>invariant</u> unter der betrachteten Transformation (Ψ_i, φ) und es gilt dann

$$\frac{\partial S^*}{\partial \varepsilon} = 0 \Longrightarrow \text{ es ex. eine Erhaltungsgröße } Q : \ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} Q(x, \dot{x}, t) = 0 \tag{4.23}$$

Um nun S^* mit S vergleichen zu können, benutzt man (4.22) und erhält

$$\begin{aligned} S^* &= \int\limits_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(x^*, \frac{\mathrm{d}x^*}{\mathrm{d}t^*}, t^*) \cdot \frac{\mathrm{d}t^*}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{d}t \\ &\overset{\text{Taylor}}{=} \int\limits_{t_1}^{t_2} \left[\mathcal{L}(x, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, t) + \varepsilon \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon} \left\{ \mathcal{L}\left(x^*, \frac{\mathrm{d}x^*}{\mathrm{d}t^*}, t^* \right) \frac{\mathrm{d}t^*}{\mathrm{d}t} \right\} \right] \mathrm{d}t \end{aligned} \tag{4.24}$$

Daraus erhält man leicht, daß, sofern $S^* = S$ gelten soll, der hintere Teil verschwinden muß, also

$$S^* = S \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon} \left\{ \mathcal{L}\left(x^*, \frac{\mathrm{d}x^*}{\mathrm{d}t^*}, t^* \right) \frac{\mathrm{d}t^*}{\mathrm{d}t} \right\}_{\varepsilon=0} = 0 \quad \text{Invarianzbedingung} \tag{4.25}$$

gelten muß. Die Ableitungen ergeben sich aus

$$\frac{\mathrm{d}t^*}{\mathrm{d}t} \overset{(4.22)}{=} 1 + \varepsilon \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t^*} = \frac{1}{1 + \varepsilon \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}} \overset{\text{entw.}}{\approx} 1 - \varepsilon \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \tag{4.26}$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}x_i^*}{\mathrm{d}t^*} &= \frac{\mathrm{d}x_i^*}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t^*} \overset{(4.22),(4.26)}{=} \left(\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} + \varepsilon \cdot \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \right) \left(1 - \varepsilon \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \right) \\ &= \dot{x}_i + \varepsilon \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} - \varepsilon \cdot \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \end{aligned} \tag{4.27}$$

Setzt man nun (4.26) und (4.27) in (4.25) ein, ergibt sich

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\left\{\mathcal{L}\left(x_i+\varepsilon\Psi_i, \dot{x}_i+\varepsilon\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t}-\varepsilon\dot{x}_i\cdot\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}, t+\varepsilon\varphi\right)\left(1+\varepsilon\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)\right\}_{\varepsilon=0} \\
&= \sum_{i=1}^N \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_i}\Psi_i + \sum_{i=1}^N \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_i}\left(\frac{\mathrm{d}\Psi_i}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}\cdot\varphi+L\cdot\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \\
&\overset{(3.4)}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{i=1}^N\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_i}\Psi_i\right)+\left(\mathcal{L}-\sum_{i=1}^N\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_i}\dot{x}_i\right)\cdot\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}+\varphi\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} \qquad (4.28)
\end{aligned}$$

Die Summenzeichen entstehen aufgrund der Tatsache, daß man die Lagrangefunktion nach allen x_i differenzieren muß. Mit Gl. (3.7) (mit $\partial\mathcal{L}/\partial t \not\equiv 0$):

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{i=1}^N\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_i}\cdot\dot{x}_i\right)$$

erhält man somit letztlich mit obiger Gl. und (4.28)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\sum_{i=1}^N\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}\dot{x}_i}\cdot\Psi_i+\left(\mathcal{L}-\sum_{i=1}^N\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_i}\cdot\dot{x}_i\right)\varphi\right\}=0 \qquad (4.29)$$

womit wir also eine zeitlich konstante Größe, also eine Erhaltungsgröße „konstruiert“ haben:

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Q(x,\dot{x},t)=0$$

$$\boxed{\Longrightarrow Q:=\sum_{i=1}^N\tfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_i}\cdot\Psi_i+\left(\mathcal{L}-\sum_{i=1}^N\tfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_i}\cdot\dot{x}_i\right)\cdot\varphi=konst} \qquad (4.30)$$

Beispiele

- Homogenität der Zeit (d.h. Invarianz des Systems gegen zeitliche Veränderungen, die z.B. bei einer zeitlich oszillierenden äußeren Kraft nicht mehr gegeben ist).
  Die Symmetrioperationen (4.22) ergeben sich in diesem Fall also zu

  $$t^*=t+\varepsilon\Longrightarrow\varphi=1$$
  $$x_i^*=x_i\Longrightarrow\Psi_i=0$$

  Damit erhält man also gemäß Gl. (4.30) die Erhaltungsgröße

  $$\overset{(4.30)}{\Longrightarrow} Q=\mathcal{L}-\sum_{i=1}^N\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_i}\dot{x}_i$$

  Setzt man konservative Kräfte voraus, so gilt

  $$\mathcal{L}=T-U=\sum_{i=1}^N\tfrac{m}{2}\dot{x}_i^2-U \quad\Longrightarrow Q=T-U-2T=-(T+U)=-E$$

  Demnach ist also die Energie des Systems eine Erhaltungsgröße, es liegt Energieerhaltung vor.

- Homogenität des Raums: (Betrachtet wird eine Verschiebung in x- Richtung).
  Damit erhält man folgende Symmetrieoperationen:

$$\vec{r}_n^* = \vec{r}_n + \varepsilon\hat{x} \qquad \Longrightarrow \Psi_x = 1; \quad \Psi_y = \Psi_z = 0$$
$$t^* = t \qquad \varphi = 0$$

  Damit ergibt sich die Erhaltungsgröße

$$\overset{(4.30)}{\Longrightarrow} Q = \sum_n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_n} = \sum_n p_{n,x} = P_x = konst$$

  Es liegt also Impulserhaltung in x-Richtung vor.

- Isotropie des Raumes, Invarianz gegen Drehungen (Drehung um Achse $\hat{\omega}$):
  Die Symmetrieoperationen lauten

$$\vec{r}^* = \vec{r} + \varepsilon \cdot \hat{\omega} \times \vec{r} \Longrightarrow \Psi = \hat{\omega} \times \vec{r}$$
$$x_i^* = x_i + \varepsilon \sum_{k,l} \epsilon_{kl} \cdot \hat{\omega}_k \cdot \dot{x}_l$$

  Daraus ergibt sich die Erhaltungsgröße

$$Q = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \cdot \Psi_i = \sum_{i=1}^{N} p_i \cdot \epsilon_{ikl} \cdot \hat{\omega}_{kl} \cdot x_l = \vec{p}(\hat{\omega} \times \vec{r}) = \hat{\omega}(\vec{r} \times \vec{p}) = \hat{\omega} \times \vec{L}$$

  Damnach bleibt also die Dehimpulskomponente in Richtung der Drehachse erhalten.

4.4 Erweitertes Noethertheorem

Das erweiterte Noethertheorem besagt, daß schon die Invarianz von δS ausreichend für die Existenz einer Erhaltungsgröße ist. Damit ergibt sich aus

$$\delta S^* = \delta S$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\left[\mathcal{L}(x^*, \tfrac{\mathrm{d}x^*}{\mathrm{d}t^*}, t^*)\tfrac{\mathrm{d}t^*}{\mathrm{d}t}\right]_{\varepsilon=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x,t) \quad \text{Invarianzbedingung,} \tag{4.31}$$

daß bei der Variation der Wirkung eine vollst. Zeitableitung verschwindet.
Beispiel: Galileiinvarianz

$$\vec{r}_n^* = \vec{r}_n + \varepsilon\hat{u}t \Longrightarrow \vec{\Psi}_n = t\hat{u}; \varphi = 0$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\left[L^*\right] = \sum_n m_n \dot{\vec{r}}_n \cdot \hat{u} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(M \cdot \vec{R}\right) \cdot \hat{u}$$

Die Invarianzbedingung ist erfüllt, somit erhält man die Erhaltungsgröße

$$Q = \sum_n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}_n} \vec{\Psi}_n - f = M\left(\dot{\vec{R}}t - \vec{R}\right) \cdot \hat{u} = konst.$$

Kapitel 5

Zentralpotential

In diesem Abschnitt werden nur Potentiale betrachtet, die Kräfte „erzeugen“, die nach innen zu einem „Zentrum“ gerichtet sind.

!!! Achtung: teilweise sind die reduzierten Massen μ und die „normalen“ Massen m verwechselt worden !!!

5.1 Zweikörperproblem

Man nehme zwei Massenpunkte der Massen m_1, m_2. Die Lagrangefunktion im Zentralpotential lautet dann

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\vec{r}_1, \dot{\vec{r}}_1, \vec{r}_2, \dot{\vec{r}}_2) = \frac{m_1}{2}\dot{\vec{r}}_1^{\,2} + \frac{m_2}{2}\dot{\vec{r}}_2^{\,2} - V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) \tag{5.1}$$

Dabei wird davon ausgegangen, daß die Lagrangefunktion nicht explizit von der Zeit abhängt.

Setzt man diese Lagrangefunktion nun in die Lagrangegleichung ein, so würde man sechs Differentialgleichungen 2. Ordnung erhalten, welche sicher in den meisten Fällen nicht sehr einfach zu lösen sind. Aus diesem Grunde ist es meist nützlich die vorhandenen Symmetrien des Systems zu erkennen und auszunutzen. Da wären

1. Translationssymmetrie im Raum

   $$\vec{r}_1 \rightarrow \vec{r}_1 + \vec{a} \qquad \vec{r}_2 \rightarrow \vec{r}_2 + \vec{a}$$

   aus dieser Symmetrie folgt die Erhaltung des Gesamtimpulses P.

   $$P = m_1\dot{\vec{r}}_1 + m_2\dot{\vec{r}}_2 = konst. \qquad \vec{P} = M\dot{\vec{R}}.$$

   Damit hat man das Zweikörperproblem auf eine „effektives Einteilchenproblem“ zurückgeführt (man hat also die Anzahl der Dgl. auf 3 halbiert).

2. Rotationssymetrie (bei Drehungen um Achsen, die durch den Schwerpunkt gehen (da V kugelsymmetrisch für Drehungen um den Schwerpunkt ist)).

   Es folgt somit die Erhaltung des Relativdrehimpulses (Drehung um gemeinsamen Schwerpunkt). Aus $\vec{L} = konst$ folgt, daß die Bewegung der beiden Teilchen (des effektiven einen Teilchens) in einer Ebene liegen muß, die senkrecht zu $\vec{L}$ liegt.

   Damit hat man von den drei Dgl. nur noch eine einzige übrig (sofern man „vernünftige“ verallgemeinerte Koordinaten wählt), die aber noch eine Dgl. zweiter Ordnung ist.

3. Zeittranslationssymmetrie. Es folgt also, wie in den vorigen Kapiteln beschrieben die Energieerhaltung und damit erhält man ähnlich wie beim eindimensionalen Massenpunkt eine Dgl. 1. Ordnung für die radiale Komponente.

Die oben aufgezählten Schritte wollen nun im Einzelnen besprochen sein.
1) Um ein „effektives Einteilchenproblem“ zu erhalten, muß eine Variablentransformation durchgeführt werden, es müssen Schwerpunkts- und Realtivvariablen eingeführt werden:
<u>Schwerpunktsvariable</u>

$$\vec{R} := \frac{1}{m_1 + m_2}(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2) = \frac{1}{M}\sum_i m_i\vec{r}_i$$

Aufgrund der Impulserhaltung ergibt sich für die Bewgung des Schwerpunkts folgende Bahn

$$\vec{R}(t) = \vec{v}_0 \cdot t + \vec{R}_0$$

<u>Relativvariable</u>

$$\vec{r} := \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

Mit diesen beiden Variablen lassen sich nun die eigentlichen Variablen darstellen durch

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \vec{r}_1 &= \vec{R} + \frac{m_2}{M}\vec{r} \qquad \vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{M}\vec{r} \\
\Longrightarrow T &= \frac{m_1}{2}\dot{\vec{r}}_1^{\,2} + \frac{m_2}{2}\dot{\vec{r}}_2^{\,2} = \frac{m_1}{2}\left(\dot{\vec{R}} + \frac{m_2}{M}\dot{\vec{r}}\right)^2 + \frac{m_2}{2}\left(\dot{\vec{R}} + \frac{m_1}{M}\dot{\vec{r}}\right)^2 \\
&= \frac{M}{2}\dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2}\underbrace{\frac{m_1 \cdot m_2}{M}}_{=\mu}\cdot\dot{\vec{r}}^2
\end{aligned}$$

mit der „reduzierten Masse“ $\mu = (m_1 m_2)/(m_1 + m_2)$.

Man erhält somit als Lagrangefunktion

$$\mathcal{L}(\dot{\vec{R}}, \vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \frac{M}{2}\dot{\vec{R}}^2 + \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 - V(|\vec{r}|) = \mathcal{L}_1(\dot{\vec{R}}) + \mathcal{L}_2(\dot{\vec{r}}, \vec{r}).$$

Man kann erkennen, daß die Variablen $\vec{R}$ und $\vec{r}$ „separiert“ oder „entkoppelt“ sind, was für den weiteren Verlauf (Aufstellen der Bewegungsgleichungen) natürlich nur von Vorteil sein kann, da bei der Ableitung nach der einen Variable die Komponenten der anderen vollständig verschwinden.

Bedenkt man jetzt noch (wie oben gezeigt), daß sich der Schwerpunkt des System geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, kann man zur Lösung der Bewegungsgleichung diese Bewegung außer Acht lassen und somit die „restliche“ Bewegung in diesem mit konstanter Geschwindigkeit bewegten Inertialsystem betrachten. Daher setzt man erst einmal:

$$\vec{R} \equiv 0$$

zur Vereinfachung der Rechnung.
2) effektives eindimensionales Problem durch Ausnutzung der Konstantheit des Relativdrehimpulses (z-Komponente).

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m \cdot \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = konst. = (0, 0, l)$$

Durch geeignete Drehung des Koordinatensystems kann man den Drehimpuls immer durch die z-Komponente ausdrücken, die im Weiteren mit l bezeichnet wird.

Man hat also aus der dreidimensionalen Bewegung durch eben diese (evtl. nicht nötige) Drehung des KS eine zweidimensionale Bewegung in der x, y-Ebene ausgedrückt. Es gilt also

$$z(t) = 0 \qquad \text{für konstanten Drehimpuls in } z\text{-Richtung}$$

Durch Einführung von Polarkoordinaten (s. Abschnitt 1.1) ergibt sich die Lagrangefunktion zu

$$\mathcal{L} = \frac{\mu}{2}(\dot{\varrho}^2 + \varrho^2\dot{\varphi}^2) - V(\varrho)$$

Dabei wurde die z-Koordinate bereits weggelassen.

Aus der Existenz der Erhaltungsgröße (Drehimpuls l) ergibt sich weiterhin

$$l = \mu\varrho^2\dot{\varphi} \Longrightarrow \dot{\varphi} = \frac{l}{\mu\varrho^2} \tag{5.2}$$

An dieser Stelle ist *Vorsicht* geboten, da man dieses $\dot{\varphi}$ <u>noch</u> nicht in die Lagrangefunktion einsetzen darf, sondern *erst* die Bewegungsgleichungen aufstellen muß. Erst *dann* kann man das $\dot{\varphi}$ in den erhaltenen Bewegungsgleichungen mittels der obigen Gleichung eliminieren. (Das hängt damit zusammen, daß beim partiellen Ableiten evtl. Fehler entstehen, da nach dem sofortigen Einsetzen die partielle Ableitung nach der eliminierten Variable verschwinden würde.) Führt man diese Überlegung nun aus, so ergibt sich

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varrho}}\right) = \mu\ddot{\varrho} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varrho} = \mu\varrho\dot{\varphi}^2 - \frac{\partial V}{\partial \varrho}$$
$$\overset{(5.2)}{\Longrightarrow} \mu\ddot{\varrho} = \frac{l^2}{\mu\varrho^3} - \frac{\partial V}{\partial \varrho} = \frac{\partial}{\partial \varrho}\left(-\frac{l^2}{2\mu\varrho^2} - V\right)$$

Führt man jetzt das „effektive Potential“ ein

$$V_{\text{eff}} := V(\varrho) + \frac{l^2}{2\mu\varrho^2}$$

$l^2/(2\mu\varrho^2)$ nennt man „Zentrifugalpotential“, so ergibt sich die Bewegungsgleichung zu

$$\Longrightarrow \mu\ddot{\varrho} = \frac{\partial}{\partial \varrho}(-V_{\text{eff}}(\varrho)) \qquad \text{mit } V_{\text{eff}} = V(\varrho) + \frac{l^2}{2\mu\varrho^2}$$

Man hat also durch die Einführung von Polarkoordinaten und das darauffolgende Eliminieren einer der beiden Koordinaten eine eindimensionale Differentialgleichung erhalten, die man nun mit dem Energiesatz noch in eine Dgl. 1. Ordnung überführen kann.
3) Ausnutzen des Energiesatzes

$$\begin{aligned} E &= T + V = \frac{\mu}{2}(\dot{\varrho}^2 + \varrho^2\dot{\varphi}^2) + V \\ &= \frac{\mu}{2}\dot{\varrho}^2 + V_{\text{eff}}(\varrho) = konst. \end{aligned}$$

Mit diesem Ansatz erhält man nun analog dem eindimensionalen Problem in Abschnitt 2.2.

$$\frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{2}{\mu}(E - V_{\text{eff}}(\varrho))}$$
$$\Longrightarrow t - t_0 = \int\limits_{\varrho(t_0)}^{\varrho(t)} \frac{\mathrm{d}\varrho'}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - V_{\text{eff}}(\varrho'))}}$$

Aus diesem Integral ergibt sich dann (sofern man auf irgendeine Art und Weise eine Lösung erhält) sofort die Bahnkurve $\varrho(t)$ aus der Umkehrfunktion.

Mit Hilfe der Drehimpulserhaltung (5.2) ergibt sich aus dem oben implizit erhaltenen $\varrho(t)$ die Winkelabhängigkeit

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\varrho} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\varrho} = \frac{l}{\mu\varrho^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - V_{\text{eff}}(\varrho'))}}$$
$$\Longrightarrow \varphi(t) - \varphi(t_0) = \int\limits_{\varrho(t_0)}^{\varrho(t)} \frac{l}{\mu\varrho'^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - V_{\text{eff}}(\varrho'))}}\mathrm{d}\varrho' \tag{5.3}$$

Diese beiden Integrale sind also wieder als „vollständige“ Lösung des Problems anzusehen, da man evtl. mit Computern fast jedes Integral zumindest numerisch beliebig gut annähern kann.

Es fehlt somit nur noch die Diskussion der Lösung, die wiederum ähnlich wie die bei dem eindimensionalen Problem in Abschnitt 2.2 verläuft.

1. Beispiel Es sei z.B. das Potential aus Abb. 5.1 gegeben. Die Randbedingungen

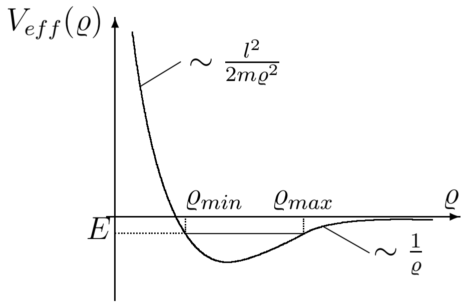

Abbildung 5.1: Teilchen im effektiven Zentralpotential, welches sich aus dem „normalen“ Potential und dem Zentrifugalpotential additiv zusammensetzt

lauten ($V(\varrho) \sim \frac{1}{\varrho}$ vorausgesetzt):

$$\lim_{\varrho \to \infty} V(\varrho) = 0; \qquad V(\varrho) < 0; \qquad \lim_{\varrho \to 0} \varrho^2 \cdot V(\varrho) = 0$$

Der 1. (interessante) Fall $E < 0$ ist in Abb. 5.1 eingezeichnet. Man erhält wieder eine finite Bewegung, zwischen den beiden Umkehrpunkten. Es handelt sich also wieder um eine periodische Bewegung von $\varrho(t)$ mit

$$\varrho_{min} \leq \varrho(t) \leq \varrho_{max}$$

Betrachtet man diese Bewegung von oben (Blick auf die x, y-Ebene, so mag das Bild wie in Abb. 5.2 aussehen. Dabei ergibt sich der Winkel, um den sich die Spiralbahn nach jeder „Schwingungsdauer“ gedreht hat als

$$\Delta\varphi = 2 \int_{\varrho_{min}}^{\varrho_{max}} \frac{l}{\mu \varrho'^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - V_{\text{eff}}(\varrho'))}} \mathrm{d}\varrho'$$

Der Faktor 2 vor dem Integral ergibt sich aus „Zeitumkehrsymmetrie“, welche einfach besagt, daß (bei vielen Problemen) es nicht darauf ankommt, in welche Richtung man eine Strecke durchläuft. (Hierbei bedeutet das einfach, daß die Wechselwirkung in einer Richtung genauso „funktioniert“ wie in die andere Richtung.)

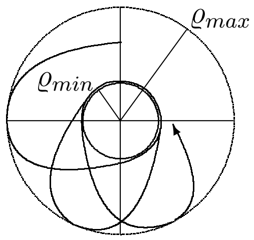

Abbildung 5.2: Bahn eines Teilchens im Zentralpotential von „oben“ betrachtet

Geschlossene Bahnen ergeben sich nur, falls die Bedingung

$$\Delta\varphi = \frac{\mu}{n} \cdot 2\pi \qquad (m, n \in \mathbf{N})$$

Im allgemeinen sind aber diese Bahnen *nicht* geschlossen.
2. Fall: Im Falle $E > 0$ und einem abnehmenden Abstand kommt es zur Streuung des Teilchens (s. Abb. 5.3) Den Streuwinkel Θ kann man wie folgt berechnen

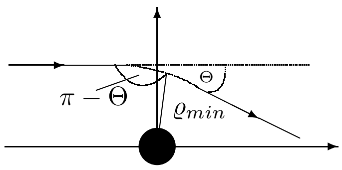

Abbildung 5.3: Ein „durchfliegendes“ Teilchen wird aufgrund der Wechselwirkungen im Zentralpotential aus seiner Bahn gerissen, also gestreut

$$\pi - \Theta = 2 \int\limits_{\varrho_{min}}^{\infty} \frac{l}{\mu\varrho'^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - V_{\text{eff}}(\varrho))}} \mathrm{d}\varrho'$$

Nun wollen wir einige Symmetrien bei der Streuung betrachten. Es ist zu zeigen, daß die Bahn bezüglich der Verbindungslinie $\overline{\varrho_{min}\text{ Ursprung}}$ symmetrisch ist.

Dazu wählt man den Zeitnullpunkt so, daß

$$\varrho(0) = \varrho_{min}; \qquad \varrho(0) = \frac{\pi + \Theta}{2}$$

gilt. Dann erhält man

$$-t \;=\; \int\limits_{\varrho(-t)}^{\varrho_{min}} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - V_{\text{eff}}(\varrho))}} \mathrm{d}\varrho' = -\int\limits_{\varrho_{min}}^{\varrho(-t)} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - V_{eff}(\varrho))}} \mathrm{d}\varrho'$$

$$
\begin{aligned}
&\stackrel{t\geq 0}{=} && -\left[\int\limits_{\varrho_{min}}^{\varrho(t)} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - V_{\text{eff}}(\varrho))}}\mathrm{d}\varrho'\right] \\
\Longrightarrow \varrho(-t) &= && \varrho(t)
\end{aligned}
$$

Daraus erhält man nun wieder

$$
\begin{aligned}
\varphi(-t) - \varphi(0) &= \int\limits_{\varrho_{min}}^{\varrho(-t)} \frac{l}{\mu\varrho'^2}\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - V_{\text{eff}}(\varrho'))}}\mathrm{d}\varrho' = \cdots \\
&= -\int\limits_{\varrho_{min}}^{\varrho(t)} \frac{l}{\mu\varrho'^2}\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - V_{\text{eff}}(\varrho'))}}\mathrm{d}\varrho' = -[\varphi(t) - \varphi(0)] \\
\Longrightarrow \varphi(-t) &= 2\varphi(0) - \varphi(t)
\end{aligned}
$$

Somit folgt also die Symmetrie der Bahnbewegung (irgendwie).
2. Beispiel Vorgegeben sie ein Potential der Art wie in Abb. 5.4. Dann folgt eine

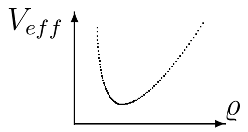

Abbildung 5.4:

elliptische Bahn (s. weit unten).
3. Beispiel Ist folgendes Potential (Abb. 5.5) vorgegeben, mit

$$\varrho^2 \cdot V(\varrho) < 0 \text{ für } \varrho \to 0,$$

so stürzt das Teilchen bei Energien kleiner $V_{eff,max}$ in das Zentrum des Potentials.

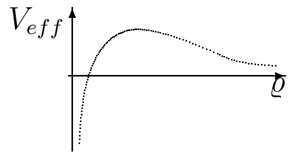

Abbildung 5.5:

5.2 Kepler-Problem

Gegeben sei ein Potential der Bauart

$$V(r) := -\frac{\alpha}{r}$$

(zuzüglich des Zentrifugalpotentials). Es bestehen zwei Möglichkeiten ein derartiges Potential (welches durch Photonen-Wechselwirkung entsteht) zu realisieren

- Gravitations-WW: $\alpha = G \cdot m_1 \cdot m_2$ (G Gravitationskonstante). Hierbei handelt es sich um ein anziehendes Potential.
- Coulomb-WW: $\alpha = -q_1 \cdot q_2$, welches je nach Vorzeichen der Ladungen abstoßend oder anziehend sein kann.

Unter Berücksichtigung des Zentrifugalpotentials erhält man also, unter Einführung von Polarkoordinaten, als effektives Potential

$$V_{\text{eff}} = -\frac{\alpha}{\varrho} + \frac{l^2}{2 \cdot \mu \varrho^2}$$

Somit erhält man aus (5.3)

$$\varphi = \varphi_0 + \int\limits_0^{\varrho} \frac{l}{\sqrt{2\mu\varrho'}} \cdot \frac{1}{\sqrt{E + \frac{\alpha}{\varrho'} - \frac{l^2}{2\mu\varrho'^2}}} \mathrm{d}\varrho'$$

Dieses „elementare“ Integral löst man durch Substitution von $1/\varrho'$ und erhält (wenn man noch $\varphi_0 = 0$ setzt)

$$\varphi = \arccos(\frac{l}{\varrho} - \mu\frac{\alpha}{l})$$

Setzt man nun

$$p := \frac{l^2}{\mu\alpha} \qquad \epsilon := \sqrt{1 + \frac{El^2}{\mu\alpha^2}},$$

erhält man

$$\varphi = \arccos(\tfrac{\frac{p}{\varrho} - 1}{\epsilon})$$
$$\Longrightarrow \tfrac{p}{\varrho} = 1 + \epsilon \cos\varphi$$

Letzt Gleichung beschreibt die Bahn einer Ellipse, für $\epsilon < 1$, mit ϵ, der Exzentrizität der Ellipse. In kartesischen Koordinaten ergibt sich diese Ellipse mit

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \cos\varphi = \tfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$p = \sqrt{x^2 + y^2} + \epsilon \cdot x$$

zu

$$\frac{(x+a\epsilon)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (5.4)$$
$$\text{mit } a := \frac{p}{1-\epsilon^2} = \frac{\alpha}{2|E|} \qquad b := \frac{p}{\sqrt{1-\epsilon^2}}$$

Allgemein ergibt sich f. (5.4) folgendes:

$\epsilon > 1, E > 0 \implies$ Hyperbel

$\epsilon > 1, E = 0 \implies$ Parabel

$\epsilon < 1, E < 0 \implies$ Ellipse

$\epsilon = 0, E = -\frac{\mu\alpha^2}{2l^2} \implies$ Kreis

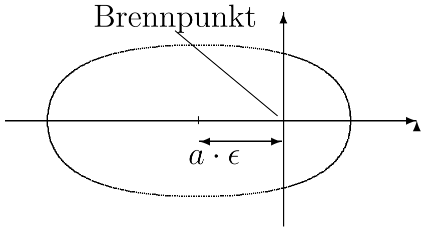

Abbildung 5.6: Ellipse mit Brennpunkt im Ursprung

5.2.1 Kepler'sche Gesetze

Die Kepler'schen Gesetze ergaben sich aus der Beobachtung der Planeten, die um die Sonne laufen, sofern man diese jeweils als Zweikörperproblem auffaßt. Es werden wieder nur die Schwerpunkte betrachtet und man setzt

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_{Sonne} \equiv 0 \qquad \vec{r}_1 = \vec{r}_{Planet} = \vec{r}$$

Somit erhält man folgende Formulierung der Kepler'schen Gesetze

1. Kepler'sches Gesetz Die Planetenbahnen sind Ellipsen mit der Sonne in einem Brennpunkt. (Dieses Gesetz wurde bereits weiter oben verifiziert).

2. Kepler'sches Gesetz Der Fahrstrahl (Verbindungslinie Planet-Sonne) überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen. Diese Tasache ergibt sich aus der Drehimpulserhaltung (s. Abschnitt 2.3)

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\varrho^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{l}{2\mu} = const.$$

l ist die z-Komponente des Drehimpulses.

3. Kepler'sches Gesetz Die Quadrate der Umlaufzeiten T verhalten sich wie die Kuben der großen Halbachse a.

Betrachtet man die Fläche, die bei einem Umlauf überstrichen wird, so erhält man sie aus

$$\begin{aligned} F(T) &= \int_0^T \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = T\frac{l}{2\mu} \stackrel{!}{=} \pi ab \\ \Longrightarrow T^2 &= \left(\frac{2\mu}{l}\right)^2 \pi^2 \cdot \underbrace{\left(\frac{p}{1-\epsilon^2}\right)^2}_{=a^2} \cdot \underbrace{\frac{p^2}{1-\epsilon^2}}_{=a\cdot p} \\ &= \frac{4\pi^2\mu}{\alpha}a^3 \end{aligned}$$

Dabei bedeutet μ allerdings die reduzierte Masse, welche nicht für alle Planeten gleich ist. Allerdings kann man die Planetenmasse gegenüber der Sonnemasse vernachlässigen und erhält somit für die Proportionalitätskonstante

$$\frac{4\pi^2\mu}{\alpha} = 4\pi^2\frac{m_p \cdot m_S}{m_p + m_s} \cdot \frac{1}{G \cdot (m_p + m_S)} \approx \frac{4\pi^2}{G \cdot m_S} = const.$$

Somit ergibt sich das 3. KG:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G \cdot m_{Sonne}} \cdot a^3 = K \cdot a^3$$

Abweichungen von den Kepler'schen Gesetzen ergeben sich aufgrund der hier vernachlässigten Gravitationswechselwirkungen der Planeten untereinander, relativistischer Effekte und des Quadrupolmoments der Sonne (die Sonne ist nicht rund und nicht homogen und kann demnach eigentlich nicht als Massenpunkt betrachtet werden), welche eine Periheldrehung hervorrufen (das Perihel ist der sonnenächste Punkt der Ellipse).

Um diese Periheldrehung mathematisch fassen zu können, wird die sog. Störungstheorie angewandt. Man betrachtet eine kleine Störung der Bahn (z.B. hervorgerufen durch ein β/r^4-Störpotential und entwickelt dann nach dieser kleinen Störung

Im weiteren wird jetzt der Fall $E < 0$ und $\epsilon < 1$ beteachtet, also der Fall der Ellipse. Wir hatten herausgefunden, daß man die Ellipsenbahn, die z.B. ein Planet um die Sonne beschreibt durch folgende Parameterdarstellung darstellen kann

$$\varrho - a = -a\epsilon\cos\xi \tag{5.5}$$

mit dem Parameter ξ. Wir benötigen im weiteren Verlauf die folgenden (oben benutzten Beziehungen bzw. Abkürzungen)

$$p = \tfrac{l^2}{\mu\alpha} \qquad l = \text{Komponente des Drehimpulses}$$
$$\epsilon = \sqrt{1 + \tfrac{2El^2}{\mu\alpha^2}} \qquad a = \tfrac{p}{1-\epsilon^2}$$

Die zeitliche Abhängigkeit ergab sich (s.o.) aus folgendem Integral

$$\begin{aligned} t &= \int_0^{\varrho} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - V_{\text{eff}})}} \mathrm{d}\varrho' = \sqrt{\frac{\mu}{2|E|}} \cdot \int_0^{\varrho} \frac{\varrho'}{\sqrt{-\varrho'^2 + \frac{\alpha\varrho'}{|E|} - \frac{l^2}{2\mu|E|}}} \mathrm{d}\varrho' \\ &= \sqrt{\frac{\mu}{2|E|}} \cdot \int_0^{\varrho} \frac{\varrho \mathrm{d}\varrho}{\sqrt{a^2\epsilon^2 - (\varrho - a)^2}} = \sqrt{\frac{\mu a^3}{\alpha}} \int_0^{\xi} (1 - \epsilon\cos\xi)\mathrm{d}\xi \\ \Longrightarrow t &= \sqrt{\frac{\mu a^3}{\alpha}} (\xi - \epsilon\sin\xi) \end{aligned}$$

Somit haben wir also einen Zusammenhang zwischen dem Parameter ξ und t gefunden. t wächst also monoton mit ξ.

Die Gleichung

$$\varrho = a(1 - \cos\xi) \tag{5.6}$$

ergibt sich aus (5.5) und wird unten benötigt.

Für die Winkelvariable φ ergibt sich nämlich

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{l}{\mu} \cdot 1\varrho^2 \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\xi} \overset{5.6}{=} \underbrace{\frac{l}{\mu}\sqrt{\frac{\mu a^3}{\alpha}}\frac{1}{a^2}}_{=\sqrt{\frac{p}{a}}=\sqrt{1-\epsilon^2}} \cdot \underbrace{\frac{1}{1 - \epsilon\cos\xi}}_{=\frac{1}{\varrho^2}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\xi}}$$

Durch Integration erhält man nun

$$\varphi(\xi) = 2\arctan\left(\frac{(1-\epsilon)\tan\left(\frac{\xi}{2}\right)}{\sqrt{1-\epsilon^2}}\right)$$

Wir haben also als Ergebnis erhalten, daß φ periodisch in ξ mit der Periode 2π ist.

Betrachtet man nochmals Abb. 5.2, so ergibt sich eine geschlossene Bahn bereits nach einem Umlauf. (Die zugehörigen Bedingungen sind, wie man leicht überprüfen kann, erfüllt).

Für ein abstoßendes Potential (Coulomb-Potential mit gleichnamigen Ladungen) ergibt sich

$$V(r) = +\frac{\alpha}{r} \qquad (\alpha > 0); \quad p \to -p$$

Mit diesen Größen erhält man nun analog

$$\rightsquigarrow \tfrac{p}{\varrho} - 1 + \epsilon \cos\varphi \qquad \varphi \to \varphi + \pi$$

Obige Gleichung beschreibt eine Hyperbel mit der Asymptote

$$\varphi_0 = pm \arccos \frac{1}{\epsilon}$$

5.3 Runge-Lenz-Vektor

Bei einem $-\alpha/r$ Potential ergibt sich der sog. „Runge-Lenz-Vektor" zu

$$\vec{A} := \dot{\vec{r}} \times \vec{L} - \alpha \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \tag{5.7}$$

Dieser Vektor ist, wie im Weiteren gezeigt wird, eine Erhaltungsgröße und zeigt in Richtung des Perihels, der küzesten Verbindung des Brennpunkts einer (oder besser *der*) Ellipse zur Bahnkurve.

Den Beweis, daß $\vec{A}$ eine Erhaltunggsgröße ist, erbringt man, indem man ihn einfach nach der Zeit ableitet und schaut, ob diese Ableitung verschwindet.

$$\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\ddot{\vec{r}} \times \vec{L}}_{=-\frac{\alpha}{\mu r^3}} + \underbrace{\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{L}}}_{=0} - \alpha \underbrace{\left(\frac{\dot{\vec{r}}}{|\vec{r}|} - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}}{\vec{r}^3} \right)}_{=\frac{1}{\mu r^3}(\vec{L}\times\vec{r})} \stackrel{!}{=} 0$$

Das Produkt $\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{L}}$ verschwindet, da die Zeitableitung des Drehimpulses verschwindet (Drehimpuls ist eine Erhaltungsgröße). Warum das mit den Vorzeichen so funktioniert, steht in den Sternen.

Um die Richtung, in die der Runge-Lenz-Vektor zeigt, berechnen zu können, wird folgende Vorüberlegung benötigt:

$$\vec{r} = \hat{x}(1-\epsilon)a \qquad \dot{\vec{r}} = \hat{y}\varrho\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \hat{y}\frac{l}{\mu\varrho}$$

Das letzte Gleichheitszeichen ergibt sich aus der Drehimpulserhaltung.

Somit ergibt sich $\vec{A}$ zu

$$\vec{A} = \hat{x}\left(\frac{l^2}{\mu\varrho} - \alpha\right) = \hat{x}\epsilon a$$

Somit folgt, daß $\vec{A}$ in Richtung des Perihels zeigt.

Da wir gelernt haben, daß sich die Erhaltungsgrößen aus Symmetrien, bzw. Symmetrietransformationen des Systems ergeben, läßt sich auch der Runge-Lenz-Vektor aus einer solchen herleiten. Wir wollen nun umgekehrt anhand der Existenz des Runge-Lenz-Vektors diese Symmetrietransformation verdeutlichen.

$\rightsquigarrow \vec{A}$ folgt aus Invarianz gegenüber der Transformation

$$\begin{aligned} x_i^* &= x_i + \varepsilon(x_k\dot{x}_i - x_i\dot{x}_k), \quad k = 1,2,3 \\ t^* &= t \\ \Longrightarrow \Psi &= (x_k\dot{x}_i - x_i\dot{x}_k), \qquad \varphi = 0 \end{aligned}$$

Wir betrachten nun wieder die Änderung der Wirkung

$$\begin{gathered} \delta S^* - \delta S = \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\left(\mathcal{L}^* \tfrac{\mathrm{d}t^*}{\mathrm{d}t}\right)_{\epsilon=0} = \sum_i \left(\tfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}\Psi_i^{(k)} + \tfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i}\dot{\Psi}_i^{(k)}\right) \\ \tfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = -\tfrac{\partial V}{\partial x_i}; \qquad \mu \cdot \ddot{x}_i = -\tfrac{\partial V}{\partial (}x_i) \\ \mu\dot{\Psi}_i^{(k)} = \mu(\dot{x}_k\dot{x}_i + x_k\ddot{x}_i - \dot{x}_i\dot{x}_k - x_i\ddot{x}_k) = -x_k\tfrac{\partial V}{\partial x_i} + x_i\tfrac{\partial V}{\partial x_k} \\ \Longrightarrow \delta S^* - \delta S = \tfrac{\partial V}{\partial x_k}\sum_i x_i\dot{x}_k - \sum_i \tfrac{\partial V}{\partial x_i}(x_k\dot{x}_i - x_i\dot{x}_k + \dot{x}_i x_k) \end{gathered}$$

Im Zentralpotential:

$$\delta S^* - \delta S = -\frac{\partial V}{\partial r}\frac{1}{r}\left(\vec{r}\dot{\vec{r}}x_k - \vec{r}^2\dot{x}_k\right) \tag{5.8}$$

Es stellt sich nun die Frage, ob es ein Potential $V(r)$ gibt, so daß $\delta S^* - \delta S = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f^{(k)}(\vec{r}) = 0$ erfüllt ist.

Ansatz:

$$\begin{gathered} f^{(k)}(\vec{r}) = g(r)\cdot x_k \quad \Longrightarrow \tfrac{\mathrm{d}f^{(k)}}{\mathrm{d}t} = \tfrac{\partial g}{\partial r}\cdot\tfrac{\vec{r}\dot{\vec{r}}}{r}x_k + g\dot{\vec{c}}_k \\ g = r\tfrac{\partial V}{\partial r} \\ \tfrac{1}{r}\tfrac{\partial g}{\partial r} = \tfrac{1}{r}\tfrac{\partial}{\partial r}(r)\tfrac{\partial V}{\partial r} = \tfrac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \tfrac{1}{r}\tfrac{\partial V}{\partial r} \overset{5.8}{=} -\tfrac{1}{r}\tfrac{\partial V}{\partial r} \\ \Longrightarrow \tfrac{\partial V}{\partial r} = \tfrac{\alpha}{r^2} \Longrightarrow V(r) = -\tfrac{\alpha}{r} \end{gathered}$$

Wir haben also eine Funktion f gefunden, die eine Zeitableitung des Wirkungsunterschieds ist, so daß ein $-\alpha/r$-Potantial entsteht.

5.4 Streuung

Eine Beschreibung und Herleitung des Steuungsphänomens wurde bereits im Abschnitt „Zweikörperproblem“ (5.1) gegeben.

Sei z.B. die Situation aus Abb. 5.7 vorgegeben (wobei der Azimutwinkel ϕ für nicht-kugelsymmetrische Probleme von größerer Bedeutung ist). Den Abstand des Teilchens von der Achse nennt man Stoßparameter s.

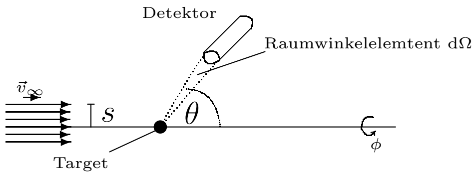

Abbildung 5.7: Streuung eines Körpers an einem „Target“

Dann ergibt sich der „differentielle Wirkungsquerschnitt“ zu

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} := \frac{\text{Anzahl der getrennten Teilchen pro Zeit und d}\Omega}{\text{Anzahl der einfallenden Teilchen pro Zeit und Fläche}}$$

Die Dimension des Wirkungsquerschnittes ist die einer Fläche.

Man definiert die Stromdichte der einfallenden Teilchen als

$$I := \frac{\Delta N_0}{\Delta t \Delta F}$$

Die Zahl der in Richtung des Raumwinkels $\Omega(\theta, \phi)$ gestreuten Teilchen Δn ergibt sich (irgendwie) zu

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{1}{I\mathrm{d}\Omega} \cdot \frac{\Delta N(\Omega)}{\Delta t}$$

Die Definition des Raumwinkel(element)s lautet:

$$\mathrm{d}\Omega := \frac{\mathrm{d}F}{R^2} = \sin(\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$$

(Das zweidimensionale Analogon des Raumwinkel ist der „normale Winkel“, das Analogon der Fläche ist die Bogenlänge.)

Für ein kugelsymmetrisches Streuobjekt ist der Wirkungsquerschnitt nur vom Streuwinkel θ, nicht aber vom Drehwinkel ϕ abhängig

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} \neq \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}(\phi) \qquad \text{f. Kugelsymmetrie}$$

Der „totale Wirkungsquerschnitt“ ergibt sich durch Integration zu

$$\sigma := \int \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\mathrm{d}\Omega = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} \sin\theta \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\mathrm{d}\theta \right) \mathrm{d}\phi$$

Einige Größenordnungen von Wirkungsquerschnitten:

2 Atome	$\sigma \approx 10\text{Å}^2 = 10^{-19}m^2$
2 Nukleonen	$\sigma \approx 10^{-28}m^2 = 1\ barn = 1$ Scheune
2 Photonen	$\sigma \approx 10^{-36}m^2$

Im Weiteren wollen wir nun versuchen, einen Zusammenhang zwischen dem Wirkungsquerschnitt und dem Stoßparameter (s.o.) herzustellen.

Es ist rein anschaulich klar, daß der Streuwinkel θ eine Funktion von s ist und es gilt auch die Umkehrung

$$\rightsquigarrow \theta = \theta(s) \qquad \Leftrightarrow s = s(\theta)$$

Weiterhin ist s auch ein Maß für den Drehimpuls l.

$$l = |\vec{r} \times \vec{p}| = mv_\infty \cdot r \sin\theta = mv_\infty s = \sqrt{2mE}s$$

Es steht einem frei, an welcher Stelle man diese Größe l berechnet, da sie einer Erhaltungsgröße, also konstant ist. Geschickterweise nimmt man einen möglichst einfachen (hier „unendlich“ weit entfernten) Punkt, an dem man l somit leicht berechnen kann.

Die Anzahl der Teilchen mit dem Stoßparameter s ergibt sich zu

$$\begin{aligned}
I \cdot 2\pi s \mathrm{d}s &\overset{\text{soll sein}}{=} \left| \int_0^{2\pi} \left(\int_\theta^{\theta+\mathrm{d}\theta} \sin\theta' \cdot I \cdot \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} \mathrm{d}\theta' \right) \mathrm{d}\phi \right| \\
&= 2\pi I \sin\theta \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}(\theta) \mathrm{d}\theta \\
\Longrightarrow \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}(\theta) &= \frac{s}{\sin\theta} \left| \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta} \right| \overset{?}{=} \left| \frac{\mathrm{d}(\pi s^2)}{2\pi \mathrm{d}\cos\theta} \right|
\end{aligned}$$

Berechnet man nun mit folgender Formel (s. Anfang Zentralpotential) die Winkelabhängigkeit

$$\varphi_0 = \int_{\varrho_{min}}^{\infty} \frac{l}{\sqrt{2m}\varrho} \cdot \frac{1}{\sqrt{E - V(\varrho) - \frac{l^2}{2m\varrho^2}}} \mathrm{d}\varrho = \int_{\varrho_{min}}^{\infty} \frac{s/\varrho^2}{\sqrt{1 - s^2/\varrho^2 - V(\varrho)/E}}$$

Der minimale Abstand im Verlauf des Streuungsprozesses ϱ_{min} ergibt sich, indem man den Nenner des hinteren Integrals $= 0$ setzt.

Wir haben also nun erhalten (mit $\theta = \pi - 2\varphi_0$), daß $\theta = \theta(s)$ ist, sofern man in den vorderen Ausdruck das Integral einsetzt.

Wir kommen nun zu einem wichtigen Spezielafall der Streuung:

5.4.1 Rutherford-Streuung

Rutherford hat auf eine dünne Goldfolie α-Teilchen geschossen und diverse Beobachtungen angestellt.

Da wir das Kepler-Problem bereits gelöst haben und in diesem Fall ein solches vorliegt mit dem Potential

$$V(r) = \frac{\alpha}{r} = \frac{Z_1 \cdot Z_2}{r} \qquad Z_1 = 2;\ Z_2 = 79$$

ergibt sich sofort, daß die Bahnkurven Hyperbeln sein müssen, die sich (s.o.) wie folgt beschreiben lassen

$$\frac{p}{\varrho} = -1 + \epsilon \cos\varphi$$

$$p = \frac{l^2}{m\alpha}; \quad \epsilon = \sqrt{1 - \frac{2El^2}{m\alpha}} = \sqrt{1 + \left(\frac{2Es}{\alpha}\right)^2} \overset{!}{>} 1$$

Der kleinste Abstand ergibt sich bei $\varphi = 0$ zu

$$\varphi = 0 \Longrightarrow \varrho_{min} = \frac{p}{\epsilon - 1}$$

Für den Fall $\varrho \to \infty$ ergibt sich die Asymptote

$$\varrho \to \infty \Longrightarrow \cos\varphi_0 = \frac{1}{\epsilon} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2Es}{\alpha}^2}} \overset{?}{=} \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2\varphi_0}}$$

$$\tan\varphi_0 = \frac{2Es}{\alpha}; \qquad s \overset{\varphi_0 = \frac{1}{2}(\pi - \theta)}{=} \frac{\alpha}{2E} \tan\left(\frac{\pi - \theta}{2}\right) = \frac{\alpha}{2E}\cot(\theta/2)$$

$$\left|\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}\right| = \frac{\alpha}{2E}\frac{1}{2}\frac{1}{\sin^2(\theta/2)}$$

Somit ergibt sich für den Wirkungsquerschnitt

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}(\theta) = \frac{s}{\sin\theta}\left|\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}\right| = \left(\frac{\alpha}{2E}\right)^2 \frac{1}{2}\frac{\cot(\theta/2)}{2\sin(\theta/2)\cdot\cos(\theta/2)} \cdot \frac{1}{\sin^2(\theta/2)}$$

Faßt man dies ein wenig zusammen, ergibt sich der „Rutherford'sche Streuquerschnitt“:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \left(\frac{Z_1 \cdot Z_2 \cdot e^2}{4E}\right)^2 \cdot \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}}$$

Abb. 5.8 gibt den R-WQ graphisch wieder. Dabei sind folgende Punkte erwähn-

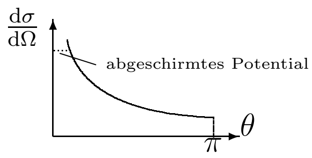

Abbildung 5.8: Der Rutherford'sche Wirkungsquerschnitt als Funktion des Streuwinkels θ

entswert

1. Für eine gewisse Anzahl von Teilchen ergibt sich eine Reflexion (Streuung um den Winkel π), eines sog. „Rückwärtsstreuung“.

2. Der Wirkungsquerschnitt $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ divergiert für $\theta \to 0$, was eine Folge der „Langreichweitigkeit“ des Coulomb-Potentials ist.

   Betrachtet man allerdings den praktischen Fall des abgeschirmten Potentials (abgeschirmt, weil die entgegengesetzten Ladungen (Elektronen in der Hülle) die eigentlichen Streukörper (Protonen) nach außen hin „abschirmen“):

   $$V_{abg.}(r) = \frac{\alpha}{r} \cdot \exp(-r/r_0)$$

   mit r_0 dem Abschirnradius (hier der Radius der Atomhülle), so ergibt sich keine Divergenz (s. Abb. 5.8)

3. Der totale Wirkungsquerschnitt σ divergiert, da

   $$\sigma = 2\pi \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\cos\theta = 2\pi \left(\frac{Z_1 \cdot Z_2}{4E}\right)^2 \int_0^\pi \frac{d\cos\theta}{\sin^4(\theta/2)} \to \infty$$

   Man erhält also eine „wahnsinnig starke Divergenz“ (wegen der dritten Potenz, die nach dem Integrieren im Nenner entsteht).

5.4.2 Transformation ins Laborsystem

Um das Problem des Zentralpotential lösen zu können, wurde das Zweiteilchenproblem zum Einteilchenproblem reduziert.

In diesem Abschnitt wird nun wieder das Zweikörperproblem betrachtet und zwar wird dem Schwerpunktssystem das Laborsystem entgegengestellt und verglichen. In Abb. 5.9 werden die beiden Bezugssysteme graphisch gegenübergestellt.

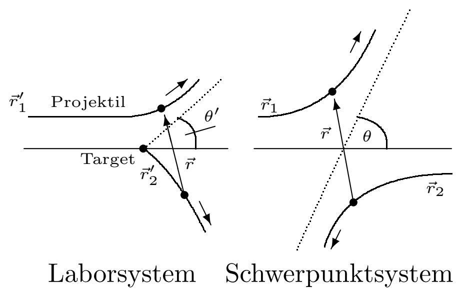

Abbildung 5.9: Die Streuung zweier Teilchen im Laborsystem (links) und im Schwerpunktssystem

Zu bemerken ist zu der Abb. noch, daß sich die beiden Streuwinkel *nicht* entsprechen ($\theta \neq \theta'$), im Schwerpunktssystem (SS) wird als Streuwinkel der Winkel genommen, um den sich der Relativvektor $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ dreht.

In der folgenden Auflistung werden kurz die Unterschiede bzw. Definitionen der beiden Bezugssystem gegenübergestellt: (Die gestrichenen Größen beziehen sich auf das Laborsystem, die ungestrichenen auf das Schwerpunktsystem).

Im Schwerpunktssystem werden Vorgänge (wie z.B. Streuung) derart betrachtet, daß man den Scherpunktsvektor festhält (bzw. =0 setzt) und gleichzeitig den Scherpunktsimpuls vernachlässigt

$$\text{Schwerpunktsystem:} \qquad \vec{R} = 0 \qquad \vec{P} = 0$$

Das hat dann zur Folge, daß sich der Schwerpunkt des Systems nicht verschiebt, sondern fest im Urpsrung verankert bleibt. Durch Einführung von Relativ- und Scherpunktskoordinaten erhält man für den Streuvorgang im Schwerpunktsystem folgende Ausdrücke

$$\begin{gathered}
\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \\
\vec{r}_1 = \tfrac{m_2}{M}\vec{r} \qquad \vec{r}_2 = -\tfrac{m_1}{M}\vec{r} \\
\dot{\vec{r}}_1 = \tfrac{m_2}{M}\dot{\vec{r}} \qquad \dot{\vec{r}}_2 = -\tfrac{m_1}{M}\dot{\vec{r}} \\
\rightsquigarrow \tfrac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \tfrac{s}{\sin\theta}\left|\tfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}\right|
\end{gathered}$$

Betrachtet man nun die analogen Beziehungen für das Laborsystem, so ergibt sich

$$\begin{gathered}
\vec{P}' = m_1\vec{v}_1'(-\infty) \qquad \vec{R}' = \tfrac{\vec{P}'}{M}\cdot t \\
\dot{\vec{r}}_i' = \vec{R}' + \vec{r}_i \qquad \dot{\vec{r}}_i' = \tfrac{m_i}{M}\cdot\vec{v}_i'(-\infty) + \dot{\vec{r}}_i
\end{gathered}$$

Im Folgenden wollen wir uns damit beschäftigen, den Wirkungsquerschnitt $(\frac{\mathrm{d}\sigma'}{\mathrm{d}\Omega'})$ des Laborsystems zu bestimmen.

Dazu wird erst einmal wieder der Zeitnullpunkt wie folgt definiert

$$|\vec{r}(0)| = \varrho_{min}$$

Es ergibt sich

$$\vec{v} = \frac{m_1}{M}\cdot\vec{v}_1'(-\infty) = \frac{m_1}{M}\cdot\frac{M}{m_2}\cdot v_1(-\infty) \tag{5.9}$$

Aus Abb. 5.10 ergibt sich mit diversen Winkelumformungen

$$\begin{gathered}
\rightsquigarrow \tan\theta' = \tfrac{v_1\sin\theta}{v_1\cos\theta + v} \overset{(5.9)}{=} \tfrac{v_1\sin\theta}{v_1\cos\theta + \frac{m_1}{m_2}} \\
\Longrightarrow \tan\theta' = \tfrac{\sin\theta}{\cos\theta + \frac{m_1}{m_2}} \qquad (5.10)
\end{gathered}$$

Für die folgenden Überlegungen benötigen wir den anschaulichen Zusammenhang

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2; \qquad \vec{r}' = \vec{r}_1' - \vec{r}_2' = \vec{r}$$

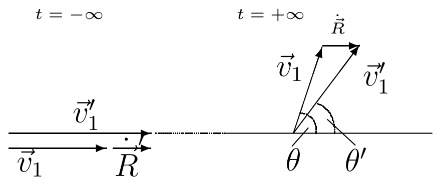

Abbildung 5.10: Grpahische Darstellung der Vektorbeziehung $\vec{v}_1'(t) = \dot{\vec{R}}' + \vec{v}_1(t)$ für die Geschwindigkeiten des Projeltils im Labor- und Schwerpunktsystem. Der linke Teil zeigt die Vektoren vor der Streuun (zum Zeitpunkt $t = -\infty$), der rechte nach der Streuung ($t = +\infty$).

außerdem

$$\vec{v}_1'(-\infty) = \vec{v}'(-\infty) = \vec{v}(-\infty) = \dot{\vec{r}}(-\infty) \overset{(5.9)}{=} \frac{M}{m_2}\dot{\vec{r}}_1(-\infty) \tag{5.11}$$

Die Stromdichte (s.o.) des Laborsystems ergibt sich wie folgt

$$I' = \left(\frac{\Delta N_1}{\Delta V}\right) \cdot v_1'(-\infty) \overset{(5.11)}{=} \left(\frac{\Delta N_i}{\Delta V}\right) \cdot \dot{\vec{r}}(-\infty) = I$$

Die Stromdichten sind somit in beiden Bezugssystemen gleich groß. Die Gleichheit beruht auch auf der Invarianz der Teilchendichte N/V bez. der Transformation vom Schwerpunkt- ins Laborsystem.

Somit ergibt sich die Anzahl der gestreuten Teilchen zu

$$\begin{aligned} &I\tfrac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}2\pi\sin\theta\mathrm{d}\theta = I\tfrac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}'}\Omega' 2\pi\sin\theta'\mathrm{d}\theta' \\ \Longrightarrow\ &\tfrac{\mathrm{d}\sigma'}{\mathrm{d}\Omega'} = \tfrac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\cdot\tfrac{\sin\theta}{\sin\theta'}\tfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\theta'} = \tfrac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\tfrac{\mathrm{d}\cos\theta}{\mathrm{d}\cos\theta'}\end{aligned}$$

Nun berechnet man zuerst mit (5.10)

$$\left(\frac{\mathrm{d}\tan\theta'}{\mathrm{d}\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta'}\frac{\mathrm{d}\theta'}{\mathrm{d}\theta}\right) = \frac{1+\frac{m_1}{m_2}\cos\theta}{\left(\cos\theta+\frac{m_1}{m_2}\right)^2}$$

und erhält nun durch Einsetzen von $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}\theta'$ den Wirkungsquerschnitt des Laborsystems zu

$$\frac{\mathrm{d}\sigma'}{\mathrm{d}\Omega'} = \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\left(\frac{\sin\theta}{\sin\theta'}\right)^3 \cdot \frac{1}{1+\frac{m_1}{m_2}\cos\theta} \tag{5.12}$$

Betrachtung von zwei wichtigen Spezialfällen

- $m_1 \ll m_2$

$$\Longrightarrow \frac{\mathrm{d}\sigma'}{\mathrm{d}\Omega'} = \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}$$

- $m_1 = m_2$

$$\Longrightarrow \tan\theta' = \tfrac{\sin\theta}{\cos\theta+1} = \tfrac{2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)}{2\cos^2(\theta/2)} \Longrightarrow \theta' = \tfrac{1}{2}\theta$$
$$\Longrightarrow \tfrac{\mathrm{d}\sigma'}{\mathrm{d}\Omega'} = \tfrac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\left(\tfrac{2\sin\theta'\cos\theta'}{\sin\theta'}\right)^3 \cdot \tfrac{1}{2\cos^2\theta'}$$
$$\Longrightarrow \tfrac{\mathrm{d}\sigma'}{\mathrm{d}\Omega'} = 4\cos\theta' \cdot \tfrac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}(\theta = 2\theta')$$

Wendet man nun diesen letzten Fall auf die Rutherfordstreuung an, so ergibt sich der Rutherford'sche Wirkungsquerschnitt im Laborsystem zu

$$\frac{\mathrm{d}\sigma'}{\mathrm{d}\theta'} = \left(\frac{Z_1 \cdot Z_2 \cdot e^2}{2E}\right)^2 \cdot \frac{\cos^2\theta'}{\sin^4\theta'} \tag{5.13}$$

Die Energie im Laborsystem ergibt sich (angeblich) zu

$$E = \frac{\mu}{2}\dot{\vec{r}}_1^2(-\infty) = \frac{1}{2}\frac{m_1^2}{2m_1}\vec{v}_1'^2(-\infty) \overset{?}{=} \frac{1}{2}E_1$$

Da stellt sich die Frage, wo die Energie geblieben ist ($E_{ges} = \frac{1}{2}E_1$) ?! Vermutlich liegt daß an der Vernachlässigung der Schwerpunktsbewegung.

Energiebetrachtung

Die folgenden Erhaltungsgrößen sind bei unserem Problem „vorhanden" (jeweils vor (ungestrichen) und nach (gestrichen) dem Stoßprzeß):

- Impuls: $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2'$
- Energie: $\frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} = \frac{p_1'^2}{2m_1} + \frac{p_1'^2}{2m_1}$

Bildet man nun das Verhältnis x der Impulse vor und nach dem Stoß

$$x = \frac{p_1'}{p_1}$$

und betrachtet die Anfangsbedingungen $\vec{p}_2 = 0$, so kann man aus den beiden Gleichungen oben (Impuls, Energie) $\vec{p}_2'$ eliminieren.

$$\Longrightarrow \tfrac{p_1^2 - p_1'^2}{2m1} - \tfrac{p_1^2 - p_1'^2}{2m2} \rightsquigarrow \tfrac{1}{2}\tfrac{m_1+m_2}{m_1 m_2}x^2 - \tfrac{1}{m_2}x\cos\theta' + \tfrac{1}{2}\tfrac{m_1-m_2}{m_1 m_2} = 0$$

Damit ergibt sich die Verlustenergie des Projektils zu

$$\frac{\Delta E}{E_1 - \infty} = (x^2 - 1) = \begin{cases} -\sin^2\theta', \text{ falls } m_1 = m_2 \\ O(m_1/m_2), \text{ falls } m_1 \ll m_2 \\ O(m_2/m_1), \text{ falls } m_1 \gg m_2 \end{cases}$$

Kapitel 6

Starrer Körper

6.1 Kinematik

Ein *starrer Körper* ist definiert als ein System von Massenpunkten mit festen Relativabständen.
1) N Massenpunkte m_n in den Positionen $\vec{r}_n$ $(n = 1, \ldots, N)$.
2) $|\vec{r}_n - \vec{r}_m| = r_{nm} = const$

Die Punkte 1 und 2 ergeben $\frac{1}{2}N(N-1)$ Gleichungen, welche aber miteinander verknüpft sein müssen, da die Anzahl der Zwangsbedingungen nicht proportional zu N^2 sein kann, sondern sich aus folgender Formel ergibt:

$$\text{Anzahl d. Zwangsbedingungen:} \qquad R_N = 3 \cdot (N-2).$$

Dieser Wert läßt sich recht leicht verifizieren. Somit ergibt sich die Anzahl der Freiheitsgrade zu

$$f = 3N - R_N = 6.$$

Das sind 3 FG für die Translationsbewegung des Schwerpunktes und 3 FG für die Drehwinkel.

6.1.1 Winkelgeschwindigkeit

Man führt zwei „neue“ Koordinatensysteme ein. ein raumfestes Inertialsystem, welches seine Lage, wie der Name schon sagt nicht ändert und ein körperfestes Koordinatensystem, welches gegebenenfalls mit dem Körper mitdreht und demnach seine Lage gegenüber dem Inertialsystem ständig ändert. Die Bezeichnungen werden im Folgenden lauten:

- raumfestes Inertialsystem: x, y, x; $\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z$.
- körperfestes Koordinatensystem: x_1, x_2, x_3; $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$

Es sollte nochmals erwähnt sein, daß die Achsen des KS *nicht* konstant im Raum stehen, sonder mehr oder weniger interessante und komplizierte Kurven durchlaufen können!

Die Lage des Ursprungs von KS in IS ergibt sich zu

$$\vec{r}_0(t); \qquad \text{Geschwindigkeit} \quad \vec{v}_0$$

Das KS dreht sich mit einer i.a. zeitlich variablen Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}(t)$

$$\vec{\omega}(t) = \hat{\omega}(t)\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \hat{\omega}(t)\omega(t)$$

Beachte hier: sowohl der Winkelgeschwindigkeitseinheitsvektor, als auch der Betrag der Geschwindigkeit sind zeitlich variabel.

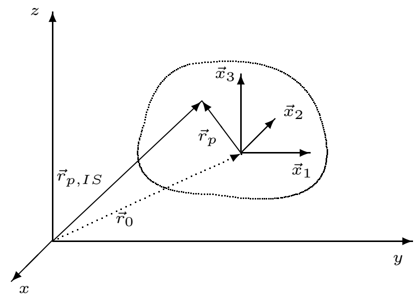

Abbildung 6.1: Die Änderung der relativen Lage des raumfesten KS eines starren Körpers (x_1, x_2, x_3) beschreibt dessen Bewegung im Inertialsystem (x, y, z), sofern man noch die Änderung des Schwerpunktsvektors im IS berücksichtigt $(\vec{r}_0)$

Es ergeben sich nach Abb. 6.1 folgende Beziehungen

$$\vec{r}_p = \vec{r}_{p,IS} - \vec{r}_0 \qquad \vec{v}_{p,IS} = \vec{v}_0 + \left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}_p}{\mathrm{d}t}\right)_{KS}$$

Wählt man nun KS so, daß

$$\vec{v}_0 + \left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}_p}{\mathrm{d}t}\right)_{KS} = 0$$

gilt, ergibt sich

$$\vec{v}_0 + \left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}_p}{\mathrm{d}t}\right)_{IS} = \omega \times \vec{r}_p$$

Es drängt sich nun die Frage auf, ob $\vec{\omega}$ von der Wahl des Ursprungs in KS abhängt. Diese Frage läßt sich verneinen, da

$$\begin{gathered}\vec{r}_0' = \vec{r}_0 - \vec{a}; \qquad \vec{v}_{p,IS} = \vec{v}_0' + \vec{\omega} \times \vec{r}_p' \\ \vec{r}_p' = \vec{r}_p + \vec{a} \qquad \vec{v}_{p,IS} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_p \\ \rightsquigarrow \vec{v}_0' + \vec{\omega}' \times \vec{r}_p + \vec{\omega}' \times \vec{a} = \vec{v}_0 + \times\vec{\omega} \times \vec{r}_p \text{ f. alle Pkte } p \\ \Longrightarrow \vec{\omega}' = \vec{\omega}.\end{gathered}$$

6.2 Euler'sche Winkel

Um die Rotation eines Körpers besser beschreiben zu können, werden geeignete verallgemeinerte Koordinaten, die sog. „Euler'schen Winkel“ wie folgt definiert (s. auch Abb. 6.2).

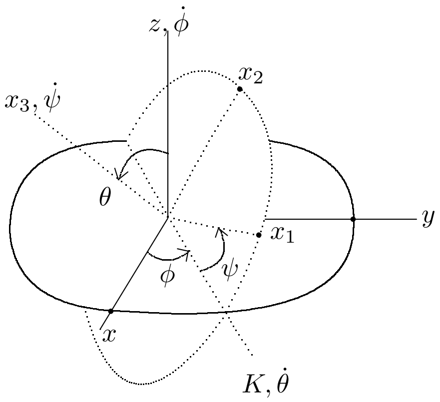

Abbildung 6.2: Zur Definition der Euler'schen Winkel ϕ, ψ, θ

$$\begin{aligned} \phi &:= \text{Winkel zwischen } x\text{-Achse und } \textit{Knotenlinie } K \\ \psi &:= \text{Winkel zwischen } K \text{ und } x_1\text{-Achse} \\ \theta &:= \text{Winkel zwischen } z\text{- und } x_3\text{-Achse} \end{aligned} \tag{6.1}$$

Diese drei Winkel beschreiben die Lage des körperfesten Koordinatensystems gegenüber dem raumfesten Inertialsystem.

Jede Drehung des körperfesten KS (bzw. des Körpers) läßt sich mit diesen Winkeln durchführen:

$$\left.\begin{array}{l} \text{1. Drehung um } z\text{-Achse mit Winkel } \psi \\ \text{2. Drehung um } x\text{-Achse mit Winkel } \theta \\ \text{3. Drehung um } z\text{-Achse mit Winkel } \phi \end{array}\right\} \tag{6.2}$$

Demzufolge ergeben sich die folgenden Winkelgeschwindigkeiten (es wird eine Drehung um jeweils einen Winkel bei Konstanthaltung der beiden anderen betrachtet):

$$\begin{aligned}\vec{\omega}_\psi &= \dot{\psi}\cdot\hat{e}_3\\ \vec{\omega}_\theta &= \dot{\theta}\cdot\hat{e}_K\\ \vec{\omega}_\phi &= \dot{\phi}\cdot\hat{e}_z\end{aligned}$$

mit den (geometrisch anschaulichen) Einheitsvektoren die sich wie folgt durch die EV des des körperfesten KS ausdrücken lassen

$$\begin{aligned}\hat{e}_K &= \cos\psi\hat{e}_1 - \sin\psi\hat{e}_2\\ \hat{e}_z &= \sin\phi\sin\psi\hat{e}_1 + \sin\theta\cos\psi\hat{e}_2 + \cos\theta\hat{e}_3\end{aligned} \tag{6.3}$$

Es ergibt sich also die allgemeine Zerlegung der „normalen“ Winkelgeschwindigkeit ω zu

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_\psi + \vec{\omega}_\theta + \vec{\omega}_\phi = \dot{\theta}\hat{e}_K + \dot{\phi}\hat{e}_z + \dot{\psi}\hat{e}_3 \tag{6.4}$$

Da man infinitesimale Drehungen vertauschen kann, ergibt sich

$$\mathrm{d}\varphi = \vec{\omega}\mathrm{d}t = \vec{\omega}_\psi\mathrm{d}t + \vec{\omega}\theta\mathrm{d}t + \vec{\omega}_\phi\mathrm{d}t$$

und damit folgt also

$$\vec{\omega} = \begin{cases} p\hat{e}_1 + q\hat{e}_2 + r\hat{e}_3 & := \quad (p,q,r) \qquad \text{(körperfest)}\\ \omega_x\hat{e}_x + \omega_y\hat{e}_y + \omega_z\hat{e}_z & := \quad (\omega_x,\omega_y,\omega_z) \quad \text{(raumfest)}\end{cases}$$

mit den Abkürzungen p, q, r (folgen aus (6.3) und (6.4)):

$$p := \vec{\omega}\hat{e}_1 = (\dot{\psi}\hat{e}_3 + \dot{\theta}\hat{e}_K + \dot{\phi}\hat{e}_z)\hat{e}_1 = \dot{\phi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi \tag{6.5}$$

$$q := \vec{\omega}\hat{e}_2 = \dot{\phi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi \tag{6.6}$$

$$r := \vec{\omega}\hat{e}_3 = \dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi} \tag{6.7}$$

Mit Hilfe der Euler'schen Winkel lassen sich Drehungen in der Ebene durch folgende Matrizenschreibweise darstellen:

z.B. Drehung in x, y- Ebene $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi \\ -\sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

bzw. Drehung um z-Achse in x, y-Ebene

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=D(\hat{z},\psi)}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Mit diesen Bezeichnungen (D) ergibt sich somit die vollständige Drehung um alle drei Euler'schen Winkel (also eine volle räumliche Drehung) zu

$$D(\psi,\theta,\phi) = D(\hat{z},\phi)D(\hat{x},\theta)D(\hat{z},\psi)$$

(s. auch Gln. (6.2)).

6.3 Trägheitstensor

Die kinetische Energie eines starren Körpers (mit N Massenpunkten ergibt sich durch

$$T = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2} m_n \dot{\vec{r}}^{\,2}_{n,IS}.$$

Um die Rotations- von der Translationsbewegung zu trennen, setzt man nun $\vec{r}_n = \vec{r}_{n,IS} - \vec{r}_0$ mit $\vec{r}_0$ im Ursprung. Damit erhält man als „Geschwindigkeit“

$$\dot{\vec{r}}_n = \vec{\omega} \times \vec{r}_n \Longrightarrow \dot{\vec{r}}_{n,IS} = \dot{\vec{r}}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_n$$

und somit

$$T = \tfrac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} m_n (\dot{\vec{r}}^{\,2}_0 + 2\dot{\vec{r}}_0 (\vec{\omega} \times \vec{r}_n) + (\vec{\omega} \times \vec{r}_n)^2) \tag{6.8}$$

Da man den mittleren Term umschreiben kann

$$\sum_{n=1}^{N} m_n (\vec{\omega} \times \vec{r}_n) \dot{\vec{r}}_n = (\dot{\vec{r}}_n \times \vec{\omega}) \sum_{n=1}^{N} m_n \vec{r}_n$$

sind nun zwei Fälle interessant. 1. Fall: $\sum_n m_n \vec{r}_n = 0$, was bedeuten würde, daß der Ursprung des Koordinatensystems in den Schwerpunkt des starren Körpers gelegt würde und 2. Fall: $\dot{\vec{r}}_0 = 0$, was bedeutet, daß sich der Auflagepunkt in Ruhe und im Ursprung befindet. Im folgenden wird einer dieser beiden Fälle angenommen, was zur Folge hat, daß man nun endlich die Translationsbewegung von der Rotationsbewegung entkoppeln kann, da der mittlere Term in (6.8) verschwindet:

$$\rightsquigarrow T \;=\; T_{\text{trans}} + T_{\text{rot}} = \frac{M}{2} \dot{\vec{r}}^{\,2}_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} m_n (\vec{\omega} \times \vec{r}_n)^2$$

Mit

$$\begin{aligned}
(\vec{\omega} \times \vec{r}_n)^2 &= \omega^2 r_n^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_n)^2 = \sum_{k,l=1}^{3} \omega_k^2 r_l^2 - \sum_{i,k=1}^{3} \omega_i r_i \omega_k r_k \\
&\overset{?}{=} \sum_{i,j=1}^{3} (r^2 \delta_{ij} - r_i r_j) \omega_i \omega_j
\end{aligned}$$

wird T_{rot} zu

$$\begin{aligned}
T_{\text{rot}} &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} m_n (\vec{\omega} \times \vec{r}_n)^2 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} \sum_{i,j=1}^{3} m_n (\vec{r}^{\,2}_n \delta_{ij} - \vec{r}_{n,i} \vec{r}_{n,j}) \omega_i \omega_j \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{3} \left(\sum_{n=1}^{N} m_n (\vec{r}^{\,2}_n \delta_{ij} - \vec{r}_{n,i} \vec{r}_{n,j}) \right) \omega_i \omega_j \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{3} \Theta_{ij} \omega_i \omega_j \qquad \text{mit } \Theta_{ij} := \sum_{n=1}^{N} m_n (\vec{r}^{\,2}_n \delta_{ij} - r_{n,i} r_{n,j})
\end{aligned} \tag{6.9}$$

Die zweifach indizierte Größe Θ_{ij} nennt man *Trägheitstensor*.

6.3.1 Massendichte

Unter der Massendichte eines Systems mit vielen Massenpunkten (also eines Systems mit kontinuierlicher Massenverteilung) versteht man

$$\varrho(\vec{r}) := \frac{\Delta m(\vec{r})}{\Delta V} \quad \text{bzw. } \varrho(\vec{r}) := \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m(\vec{r})}{\Delta V}$$

Dabei ist $\Delta m(\vec{r})$ die Masse eines sog. „Untersystems“, in welche man das eigentliche System aufteilen kann. ΔV ist das zugehörige Volumen des Untersystems.

Der Trägheitstensor eines Systems mit kontinuierlicher Massenverteilung ergibt sich damnach zu

$$\begin{aligned}
\Theta_{ij} &= \sum_{n=1}^{N} m(\vec{r}_n)(\vec{r}_n^{\,2}\delta_{ij} - r_{n,i}r_{n,j}) \\
&= \sum_{n=1}^{N} \varrho(\vec{r}_n)(r^2\delta_{ij} - r_{n,i}r_{n,j})\Delta V \\
&\xrightarrow{N\to\infty} \int_V \varrho(r)\left(r^2\delta_{ij} - r_i r_j\right) \mathrm{d}^3 r
\end{aligned}$$

6.3.2 Drehimpuls

Der Drehimpuls hängt bei einem System von Massenpunkten vom Bezugspunkt ab, es ist

$$\vec{L} = \begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{N} m_n(\vec{r}_{n,IS} \times \dot{\vec{r}}_{n,IS}) & \text{bzgl. Ursprung von IS} \\ \sum\limits_{n=1}^{N} m_n(\vec{r}_n \times \dot{\vec{r}}_n) & \text{bzgl. Ursprung von KS bzw. } \vec{r}_0 \end{cases}$$

In der letzen Gl. kann man $\dot{\vec{r}}_n$ durch $(\vec{\omega} \times \vec{r}_n)$ ersetzen und darauf dann

$$\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\omega} r^2 - \vec{r}(\vec{\omega} \cdot \vec{r}) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}(r^2\delta_{ij} - r_i r_j)\omega_k \hat{e}_i$$

anwende. Man erhält

$$\vec{L}_i = \sum_{n=1}^{N} m_n \sum_{j=1}^{3}(r_n^2 - \delta_{ij} - r_{n,i}r_{n,j})\omega_j = \sum_{j=1}^{3}\Theta_{ij}\omega_j \tag{6.10}$$

<u>Notation:</u> 1. Matrixschreibweise:

$$\underline{\Theta} := \begin{pmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} & \Theta_{13} \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} & \Theta_{23} \\ \Theta_{31} & \Theta_{32} & \Theta_{33} \end{pmatrix} \qquad \vec{L} := \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} \qquad \vec{\omega} := \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \vec{L} = \underline{\Theta}\vec{\omega}$$

2. Dyadenschreibweise: Ein Dyade ist wie folgt definiert:

$$\overset{\leftrightarrow}{\Theta} := \sum_{i,j=1} \Theta_{ij} \hat{e}_i \circ \hat{e}_j$$

dabei ist das dyadische Produkt „$\circ$“ so definiert, daß $\hat{e}_i \circ \hat{e}_j$ angewandt auf einen bel. Vektor $\vec{a}$ den Vektor $(\hat{e}_j \cdot \vec{a})\hat{e}_i$ ergibt.

Damit ergibt sich eine weitere Schreibweise für $\vec{L}$, nämlich

$$\vec{L} = \overset{\leftrightarrow}{\Theta} \vec{\omega} \tag{6.11}$$

Somit ergeben sich auch drei Schreibweisen für die Rotationsenergie

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{3} \Theta_{ij} \omega_i \omega_j = \frac{1}{2} \vec{\omega} \overset{\leftrightarrow}{\Theta} \vec{\omega} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \underline{\Theta} \vec{\omega}. \tag{6.12}$$

Die Richtung von $\vec{L}$ weist i.a. nicht in die Richtung eines Einheitsvektors $\hat{n}$, in der man gerne die jeweilige Komponente betrachten würde. Das Drehmoment bzgl. eines bel. Einheitsvektors $\hat{n}$ ist aber gegeben durch

$$L_n = \hat{n} \vec{L} = \hat{n} \overset{\leftrightarrow}{\Theta} \vec{\omega} = \hat{n} \overset{\leftrightarrow}{\Theta} \hat{n} \omega_n = \Theta_{nn} \omega_n.$$

6.3.3 Hauptachsentransformation

Da wir uns von Anfang an auf das körperfeste Koordinatensystem bezogen haben, und außerdem die Trägheitsmomente eines Körpers bezüglich seiner drei (normalen kartesischen) Achsen prinzipiell vorgegeben sind, stellt sich nun die Aufgabe, die „Matrix“ des Trägheitstensors zu diagonalisieren.

Man kann eine Matrix wohl immer diagonalisieren, wenn sie symmetrisch ist und alle auftretenden Größen reell sind, wenn also

$$\Theta_{ij} = \Theta_{ji}$$

mit reellen Θ_{ij} gilt. Jede symmetrische, reelle Matrix kann man durch eine orthogonale Transformation (eine Drehung) $\underline{\alpha}$ diagonalisieren

$$\underline{\Theta}' = \underline{\alpha}\,\underline{\Theta}\,\underline{\alpha}^T = \begin{pmatrix} \Theta'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \Theta'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \Theta'_{33} \end{pmatrix}.$$

Die auftretenden Größen Θ'_{ii} sind die Eigenwerte der Matrix und gleichzeitig die Trägheitsmomente des zu betrachtenden Körpers entlang der Hauptachsen (Hauptachsenträgheitsmomente).

Mit Gl. (6.9) ergibt sich

$$\Theta_1 \equiv \Theta'_{11} \overset{(6.9)}{=} \sum_{n=1}^{N} m_n (r_n^2 - r_{n_1}^2) = \sum_{n=1}^{N} m_n (\underline{r_{n,2}^2 + r_{n,3}^2})$$

Der unterstrichene Teil ist der Abstand des Punktes von der Drehachse 1. Entsprechendes gilt für die anderen beiden Achsen.
Bestimmung von $\underline{\alpha}$: Durch folgende Transformation ergibt sich die diagonalisierte Matrix (s.o.)

$$\Theta'_{ij} = \sum_{l,k} \alpha_{il}\Theta_{lk}\alpha^T_{ki} = \Theta_i\delta_{ij} \tag{6.13}$$

Für die orthogonale Matrix $\underline{\alpha}$ gilt

$$\underline{\alpha}^{-1} = \underline{\alpha}^T; \qquad \underline{\alpha}^{-1}\underline{\alpha} = \underline{\alpha}^T\underline{\alpha} = \underline{\alpha}\underline{\alpha}^T = \underline{I}$$

Aus Gl. (6.13) ergibt sich durch Multiplikation von links mit $\underline{\alpha}^T$ folgendes

$$\sum_{k=1}^{3} \Theta_{ik}\alpha^T_{kj} = \alpha^T_{il}\Theta_j.$$

Das ist für festes j ein System 3 gekoppelter homogener linearer Gleichungen.

$$\vec{\omega}_{(j)} = \begin{pmatrix} \alpha^T_{1,j} \\ \alpha^T_{2,j} \\ \alpha^T_{3,j} \end{pmatrix}$$

Damit dieses System lösbar ist, muß die Determinante der Koeffizientenmatrix verschwinden. Die Lösbarkeitsbedingung für dieses System lautet also

$$\det(\underline{\Theta} - \Theta_i\underline{I}) = 0,$$

woraus sich ein Polynom dritten Grades für die Θ_i (die Eigenwerte) ergibt. Mittels der so gefundenen Eigenwerte lassen sich nun die Eigenvektoren $\vec{\omega}^{(j)}_k = \alpha^T_{kj}$ bestimmen, welche zueinander orthogonal sind. Durch diese Eigenvektoren ist die Transformationsmatrix $\underline{\alpha}$ bestimmt.

Die Drehung um die Hauptachsen (das sind die Achsen, bei denen der Drehimpuls $\vec{L}$ parallel zu $\vec{\omega}$ liegt) läßt sich wie folgt darstellen:

$$\underline{\Theta} = \sum_{i=1}^{3} \vec{\omega}^{(i)}\Theta_i\vec{\omega}^{(k)^T}$$

mit $\underline{\Theta}\vec{\omega}^{(k)} = \Theta_k\vec{\omega}^{(k)}$. Diese Darstellung ist wohl sehr bequem.

6.3.4 Änderung des Trägheitstensors bei Verschiebung des Bezugspunktes, der Steiner'sche Satz

Der folgende Abschnitt behandelt die Änderung des Trägheitstensors, wenn man die Drehachse parallel verschiebt.

$$\begin{aligned} \underline{\Theta}'_{ij} &= \sum_{n=1}^{N} m_n \left[(\vec{r}_n + \vec{a})^2\delta_{ij} - (r_{ni} + a_i)(r_{nj} + a_j)\right] \\ &= \sum_{n=1}^{N} m_n \left[(\vec{r}_n^2 + 2\vec{r}_n\vec{a} + \vec{a}^2)\delta_{ij} - (r_{ni}r_{nj} + a_1 r_{nj} + a_j r_{ni} + a_i a_j)\right] \end{aligned}$$

Durch Einführung von Schwerpunktskoordinaten

$$\vec{R} = \frac{1}{M}\sum_{n=1}^{N} m_n \vec{r}_n$$

ergibt sich somit

$$\Theta'_{ij} = \Theta_{ij} + M[(2\vec{R}\vec{a} + a^2)\delta_{ij} - (R_i a_j + R_j a_i + a_i a_j)]$$

Setzt man nun den Schwerpunktsvektor $\vec{R} = 0$, also den Ursprung des KS in den Schwerpunkt, so erhält man den Steiner'schen Satz

$$\boxed{\Theta'_{\hat{n}\hat{n}} = \Theta_{\hat{n}\hat{n}} + Mb^2},$$

dabei ist $\vec{b} = \vec{a} - \hat{n}(\vec{a}\hat{n})$ der Abstand der neuen Drehachse von der alten.

6.4 Definition und Eigenschaften von Tensoren

Es wird das Transformationsverhalten unter Drehungen (orthogonalen Transformationen) $\underline{\alpha}$ betrachtet:

Bei einer solchen Transformation $\underline{\alpha}$ muß gelten, daß die Abstände des transformierten Objekts invariant bleiben:

$$x' = \underline{\alpha} x; \qquad \vec{r}' = \underline{\alpha}\vec{r}$$
$$\Longrightarrow \vec{r}'^2 = (\underline{\alpha}\vec{r})^2 \stackrel{!}{=} \vec{r}^2 \quad \text{bzw.} \quad \sum_i (\sum_k \alpha_{ik} x_k)(\sum_j \alpha_{ij} x_j) \stackrel{!}{=} \sum_j x_j^2$$

Es folgt die Definition für orthogonale Transformationen (physikalisch: Drehungen)

$$\sum_i \underbrace{\alpha_{ki}}_{=\alpha^T_{ik}} \alpha_{ij} = \delta_{ik} \Leftrightarrow \underline{\alpha}^T \underline{\alpha} = \underline{I}$$

Definition: Die Komponenten eines Tensors A transformieren sich unter orthogonalen Transformationen (Drehungen) wie

$$A'_{i_1 \ldots i_N} = \sum_{m_1,\ldots,m_N=1}^{3} \alpha_{i_1 m_1} \ldots \alpha_{i_N m_N} A_{m_1 \ldots m_N}$$

Dann ist A ein Tensor N-ter Stufe.

Im Klartext heißt das, daß eine Größe genau dann ein Tensor ist, wenn sie physikalisch invariant gegenüber der Transformation bleibt. (s. auch Beispiel Ortsvektor) Beispiele: Tensoren 0. Stufe sind Skalare, da sie sich gar nicht transformieren. 1. Stufe sind Vektoren: $A'_i = \sum_m \alpha_{i_m} A_{i_m}$. Als Beispiel möge der Ortsvektor dienen.

Man stelle sich zwei Personen in zwei versch. KS vor, die gegeneinander gedreht sind, die also durch eine orthogonale Transformation ineinander übergehen. Eine Größe ist genau dann eine Orstvektor (bzw. Tensor 1. Stufe), wenn er von allen KS aus physikalisch gleich ist, also auf den selben Punkt zeigt. In den jeweiligen KS haben die einzelnen Vektoren zwar unterschiedliche Komponenten, jedoch wird dies aufgehoben durch die Transformation der Einheitsvektoren, so daß letztlich für den außenstehenden Beobachter die Summe $\sum_i r_i \hat{e}_i$ für die jeweiligen KS denselben Vektor (für ihn) ergeben und somit auf denselben Punkt zeigen.
2. Stufe können als Matrizen dargestellt werden:

$$A'_{i_1 i_2} = \sum_{m_1 m_2}^{3} \alpha_{i_1 m_1} \underbrace{\alpha_{i_2 m_2}}_{=\alpha^T_{m_2 i_2}} A_{m_1 m_2}$$

$$\text{oder } \underline{A}' = \underline{\alpha}\, \underline{A}\, \underline{\alpha}^T$$

6.4.1 Rechenopeationen für Tensoren

1. Addition

$$\beta A_{i_1 \dots i_N} + \gamma B_{i_1 \dots i_N} = C_{i_1 \dots i_N}.$$

2. Multiplikation „direkt“

$$A_{i_1 \dots i_N} \cdot B_{i_{N+1} \dots i_{N+M}} = C_{i_1 \dots i_{N+M}}.$$

3. Multiplikation „skalar“

$$\sum_{j_1, \dots, j_l} A_{i_1 \dots i_N j_1 \dots j_N} B_{j_1 \dots j_l i_{N+1} \dots i_{N+M}} = C_{i_1 \dots i_{N+M}}.$$

4. Kontraktion von Indizes

$$\sum_k A_{i_1 \dots k \dots k \dots i_N} = C_{i_1 \dots i_{N-2}}.$$

Es bleibt dem geneigten Leser überlassen, diese Regeln zu überprüfen!

6.4.2 Pseudotensoren

Definition: Eine N-fach indizierte Größe heißt Pseudotensor, wenn sie sich nach folgender Gleichung transformiert

$$A'_{i_1 \dots i_N} = \det \underline{\alpha} \sum_{m_1=1}^{3} \dots \sum_{m_N=1}^{3} \alpha_{i_1 m_1} \dots \alpha_{i_N m_N} A_{m_1 \dots m_N}.$$

Das heißt, da $\det \underline{\alpha} = \pm 1$ ist (1 für „eigentliche Drehungen", -1 für zusätzliche Spiegelungen oder Inversionen (Punktspiegelungen)), daß neben den „richtigen" Tensoren diejenigen Größen Pseudotensoren sind, die unter eine Spiegelung gefolgt von einer Negation invariant bleiben.

Beispiele für Pseudotensoren sind der Levi-Civita-Tensor und das Kreuzprodukt. Letzteres kann man leicht verifizieren, indem man zwei Vektoren o.B.d.A an der xy-Ebene spiegelt und dann das Kreuzprodukt überprüft.

6.5 Euler'sche Gleichungen

Grundlage der folgenden Überlegungen ist die Bewegungsgleichung für starre Körper (2.3):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{L} = \vec{M}.$$

Im körperfesten Koordinatensystem ist s. (2.1) u. (6.11):

$$\vec{L} = \sum_{n=1}^{N} m_n(\vec{r}_n \times \dot{\vec{r}}_n) = \overleftrightarrow{\Theta}\,\vec{\omega}$$

Das Drehmoment ist durch (2.2) definiert als

$$\vec{M} = \sum_{n=1}^{N} \vec{r}_n \times \vec{K}_n^{(a)},$$

wobei nur äußere Kräfte auftreten.

In dem KS, in dem $\underline{\Theta}$ diagonal ist, also nach Ausführung der Hauptachsentransformation werden folgende Größen definiert

$$\underline{\Theta} := \begin{pmatrix} \Theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_3 \end{pmatrix}; \qquad \vec{\omega} := \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}; \qquad \vec{M} := \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix}.$$

Mit diesen Bezeichnungen ergibt sich nun

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{L}\right)_{IS} = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\underline{\Theta}\vec{\omega})\right)_{IS} \stackrel{(2.6)}{=} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underline{\Theta}\vec{\omega}\right)_{KS} + \vec{\omega} \times (\underline{\Theta}\vec{\omega}) \tag{6.14}$$

Da $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Theta\vec{\omega}_{IS} = \underline{\Theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{\omega}$ gilt, ergeben sich aus (6.14) folgende Gleichungen

$$\Longrightarrow \begin{array}{l} \Theta_1 \cdot \dot{p} + (\Theta_3 - \Theta_2) \cdot q \cdot r = M_1 \\ \Theta_2 \cdot \dot{q} + (\Theta_1 - \Theta_3) \cdot p \cdot r = M_2 \\ \Theta_3 \cdot \dot{r} + (\Theta_2 - \Theta_1) \cdot p \cdot q = M_3 \end{array} \tag{6.15}$$

mit p, q, r aus den Gln. (6.5)-(6.7):

$$\begin{aligned} p &= \dot{\phi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi \\ q &= \dot{\phi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi \\ r &= \dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi} \end{aligned}$$

Die Euler'schen Gleichungen stellen also drei Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die Euler'schen Winkel dar, sie sind die Rotationsbewegungsgleichungen des starren Körpers.

Im nächsten Abschnitt wird vorausgesetzt, daß das Drehmoment verschwindet, also eine freie Rotationsbewegung stattfinden kann.

6.5.1 Freie Rotation um eine Hauptachse

In dem Fall der kräftfreien Bewegung tritt aufgrund dem Fehlen des angreifenden Trägheitsmoments keine Änderung der Winkelgeschwindigkeit auf, man benötigt also nur eine Lösung mit $\dot{p} = \dot{q} = \dot{r} = 0, M_i = 0$. Damit reduzieren sich die Euler'schen Gleichungen zu

$$\begin{aligned} (\Theta_3 - \Theta_2) \cdot q \cdot r = 0 \\ (\Theta_1 - \Theta_3) \cdot p \cdot r = 0 \\ (\Theta_2 - \Theta_1) \cdot p \cdot q = 0 \end{aligned}$$

Falls nun die einzelnen Trägheitsmomente paarweise verschieden sind, kann man durch die einzelnen Klammern dividieren und somit existiert (neben der trivialen) nur eine Lösung der Art

$$\begin{aligned} p &= p_0 \neq 0, \quad q = r = 0 \quad \text{oder} \\ r &= r_0 \neq 0, \quad q = p = 0 \quad \text{oder} \\ q &= q_0 \neq 0, \quad p = r = 0, \end{aligned}$$

welche jeweils eine Drehung um die zugehörige Hauptachse darstellen.

Stabilität der Lösung

Die oben gefundenen Lösungen werden nun auf ihre Stabilität untersucht. Es wird sich herausstellen, daß die Drehung um die Achsen mit höchstem und niedrigstem Trägheitsmoment stabil sind, die andere hingegen nicht.

Um die Stabilität zu überprüfen wird nicht von einer „perfekten“ Drehung um die jeweilige Achse ausgegangen, sondern von einer minimal gestörten:

$$\begin{aligned} & p \approx p_0, \quad q \ll p_0, \qquad r \ll p_0 \\ \Longrightarrow\ & \Theta_1\dot{p} + (\Theta_3 - \Theta_2) \underbrace{p \cdot q}_{\approx 0} = 0 \Longrightarrow p = p_0 \end{aligned}$$

Setzt man dieses Ergebnis nun in die beiden anderen Euler'schen Gleichungen ein, und eliminiert dann mit der jeweiligen anderen Gleichung (wie in AmaIII durch Ableiten) die „Fremdvariable“, so ergibt sich

$$\ddot{q} + Hq = 0; \qquad \ddot{r} + Hr = 0$$
$$\text{mit} \quad H = \frac{(\Theta_1 - \Theta_3)(\Theta_1 - \Theta_2)}{\Theta_2 \cdot \Theta_3} p_0^2$$

Die Lösung ergibt sich daraufhin mit dem Ansatz $q(t) = q_0 e^{kt}$ zu

$$k^2 q + Hq = 0 \Longrightarrow k = \sqrt{-H}$$

Analog geht man vor für r (mit demselben Ergebnis). Zwei Fälle können nun auftreten:

1. $H > 0 \Leftrightarrow$ Das Trägheitsmoment Θ_1 ist das größte oder kleinste der drei Hauptträgheitsmomente. k ist dann imaginär, was periodische Lösungen zur Folge hat:

   $$r(t) = a\cos(\sqrt{H}t + b); \qquad q(t) = c\cos(\sqrt{H}t + d).$$

   In diesem Fall führen kleine Abweichungen also zu einer Oszillation um die perfekte Lösung. Die kleinen Abweichungen bleiben klein, in dem Sinne ist diese Lösung stabil.

2. $H < 0 \Leftrightarrow \Theta_2 < \Theta_1 < \Theta_3$ oder $\Theta_3 < \Theta_1 < \Theta_2$. Da in diesem Fall H negativ ist, ist k reell, somit folgen exponentiell wachsende und fallende Lösungen:

   $$r(t) = ae^{-\sqrt{|H|}t} + be^{+\sqrt{|H|}t}$$
   $$q(t) = ce^{-\sqrt{|H|}t} + de^{+\sqrt{|H|}t}.$$

   In diesem Falle wachsen also kleine Abweichung exponentiell an, demnach ist die Lösung nicht stabil.

Es hat sich also tatsächlich bestätigt, daß die Rotation um die Achsen mit größtem und kleinsten Trägheitsmoment stabil, die um die Achse mit dem „mittleren“ Trägheitsmoment hingegen instabil ist.

6.6 Kräftefreier symmetrischer Kreisel

Für einen rotationssymmetrischen Kreisel ergeben sich folgende Trägheitsmomente

$$\Theta_1 = \Theta_2; \qquad \Theta_3 \neq \Theta_1.$$

Dieser Kreisel rotiert um die r_3-Achse bzgl. der er rotationssymmetrisch ist. Man bezeichnet diese Achse als Figurenachse.

Die Euler'schen Gleichungen für dieses System ohne angreifende äußere Drehmomente mit dem Schwerpunkt als Unterstützungspunkt lauten

$$\Theta_1\dot{p}(\Theta_3-\Theta_1)qr=0$$
$$\Theta_2\dot{q}(\Theta_1-\Theta_3)rp=0$$
$$\Theta_3\dot{r}=0\Longrightarrow r=r_0=const.$$

Durch Einsetzen der letzen Gleichung verbleiben die übrigen Gleichungen als

$$\dot{p}-Rq=0 \qquad \dot{q}+Rp=0$$
$$\text{mit } R=\tfrac{\Theta_1-\Theta_3}{\Theta_1}\dot{r}_0.$$

Die allgemeine Lösung dieses Systems lautet nun

$$p(t)=a\sin(Rt+\psi_0) \qquad q(t)=a\cos(Rt+\psi_0).$$

aus den gefundenen Größen kann man nun $\vec{\omega}^2$ berechnen

$$\vec{\omega}^2=p^2+q^2+r^2=a^2+r_0^2=const.$$

Man kann erkennen, daß die Projektion des $\vec{\omega}$ auf die r_1,r_2-Ebene mit der Winkelgeschwindigkeit R rotiert. Das heißt, daß nicht nur der Kreisel um seine Figurenachse rotieren kann, sondern die Figurenachse ebenfalls noch um die r_3-Achse rotieren kann.

Durch obige Rechnung wurde zwar $\vec{\omega}$ bestimmt, die exakte Lage des Körpers im Raum (die Eulerwinkel) sind jedoch noch nicht bestimmt, aber

$$\begin{aligned}
p &= \dot{\phi}\sin\theta\sin\psi+\dot{\theta}\cos\psi=a\sin(Rt+\psi_0)\\
q &= \dot{\phi}\sin\theta\cos\psi-\dot{\theta}\sin\psi=a\cos(Rt+\psi_0)\\
r &= \dot{\phi}\cos\theta+\dot{\psi}=r_0
\end{aligned}$$

Wählt man nun das Koordinatensystem des Inertialsystem so, daß die z-Achse parallel zur Figurenachse steht, also $\vec{L}=L\cdot\hat{e}_z$, so gilt im körperfesten KS

$$(L_1,L_2,L_3)=L(\hat{e}_z\hat{e}_1,\hat{e}_z\hat{e}_2,\hat{e}_z\hat{e}_3)\stackrel{(6.3)}{=}L(\sin\theta\sin\psi,\sin\theta\cos\psi,\cos\theta)$$

Man sieht, daß die L_i unabhängig vom dritten Eulerwinkel ϕ sind und daß θ und ψ spärische Polarwinkel von $\vec{L}$ sind (bis auf die Vertauschung der x und y-Achse).

Aus der Drehimpulserhaltung folgt nun

$$\begin{aligned}
p &= \frac{L_1}{\Theta_1}=\frac{L}{\Theta_1}\sin\theta\cos\psi=a\sin(Rt+\psi_0) \qquad (6.16)\\
q &= \frac{L_2}{\Theta_2}=\frac{L}{\Theta_1}\sin\theta\cos\psi=a\cos(Rt+\psi_0)\\
r &= \frac{L_3}{\Theta_3}=\frac{L}{\Theta_3}\cos\theta=r_0.
\end{aligned}$$

Daraus erhält man

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{r_0\Theta_3}{L} \Longrightarrow \theta = \theta_0 = const. && (6.17) \\ \tan\psi &= \tan(Rt+\psi_0) \Longrightarrow \psi(t) = Rt+\psi_0 && (6.18) \end{aligned}$$

Setzt man dies nun in Gl. (6.16) ein, ergibt sich

$$\sin\theta_0 = \frac{a\Theta_1}{L} \Longrightarrow \tan\theta_0 = \frac{a}{r_0}\frac{\Theta_1}{\Theta_3}$$

Mit (6.17) erhält man damit schließlich

$$\sin^2\theta_0 + \cos^2\theta_0 = \left(\tfrac{a\Theta_1}{L}\right)^2 + \left(\tfrac{r_0\Theta_3}{L}\right)^2 = 1$$
$$\Longrightarrow L^2 = (a\Theta_1)^2 + (r_0\Theta_3)^2$$

Daraus erhält man den Öffnungswinkel γ des Präzessionskegels (Polkegels) zu

$$\tan\gamma = \frac{a}{r_0} \qquad a^2 = \frac{L^2}{\Theta_1^2 + \Theta_3^2\tan^2\gamma}$$

Den dritten Eulerwinkel kann man nun ebenfalls bestimmen (mit $\dot\theta = 0$)

$$p = \dot\phi\sin\theta\underline{\sin\psi} = a\underline{\sin(Rt+\psi_0)}$$

Die beiden unterstrichenen Terme fallen wegen (6.18) weg:

$$\dot\phi = \frac{a}{\sin\theta_0} = \frac{L}{\Theta_1} \Longrightarrow \phi(t) = \frac{L}{\Theta_1}t + \phi_0$$

Die Euler'schen Winkel haben im vorliegenden Fall folgende „Bedeutung“:

$$\begin{aligned} \theta_0 &= \text{Winkel zw. Figurenachse und } \vec{L} \\ \phi &= \text{Drehung der Figurenachse um die } z\text{-Achse (d.h. um } \vec{L}) \\ \psi &= \text{Drehung des Körpers um die Figurenachse} \end{aligned}$$

Diesen Sachverhalt spiegelt Abb. 6.3 wieder. Die Vektoren $\vec{L}$, $\vec{\omega}$ und $\hat{e}_3$ liegen alle in einer Ebene und $\vec{\omega}$ ergibt sich als

$$\vec{\omega} = \dot\phi\hat{e}_z + \dot\psi\hat{e}_3 + \underbrace{\dot\theta\hat{e}_K}_{=0}.$$

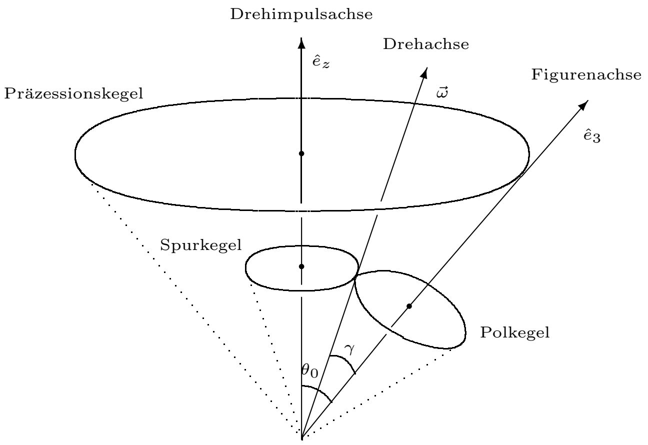

Abbildung 6.3: Zur Veranschaulichung der Bewegung des kräftefreien symmetrischen Kreisels und dessen Eulerwinkel

6.7 Lagrangefunktion

Die verallgemeinerten (oder dynamischen) Variablen sind im Falle der Rotationsbewegung die drei Euler'schen Winkel ϕ, ψ, θ. Damit ergibt sich die Lagrangefunktion formal zu

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\phi,\theta,\psi,\dot\phi,\dot\theta,\dot\psi,t) &= T_{\text{rot}} - U \overset{(6.12)}{=} \frac{1}{2}\vec{\omega}\underline{\Theta}\vec{\omega} - U(\phi,\theta,\psi,t). \qquad (6.19) \\ T_{\text{rot}} &= \frac{1}{2}\vec{\omega}\underline{\Theta}\vec{\omega} = \frac{1}{2}(\Theta_1 p^2 + \Theta_2 q^2 + \Theta_3 r^3) \\ &= \frac{\Theta_1}{2}(\dot\phi\sin\theta\sin\psi + \dot\theta\cos\psi)^2 + \frac{\Theta_2}{2}(\dot\phi\sin\theta\cos\psi - \dot\theta\sin\psi)^2 \\ &\quad + \frac{\Theta_3}{2}(\dot\phi\cos\theta + \dot\psi)^2 \end{aligned}$$

Damit erhält man folgende Lagrangegleichungen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\psi}\right) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\theta}\right) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\phi}\right) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}$$

Es folgt eine Anwendung der Lagrangefunktion:

6.7.1 Schwerer symmetrische Kreisel

Aufgrund der Symmetrie gilt wie beim kräftefreien symmetrischen Kreisel

$$\Theta_1 = \Theta_2 \neq \Theta_3,$$

wobei die Figurenachse wiederum parallel zur $\hat{e}_3$ Achse liegen soll. Es ergibt sich

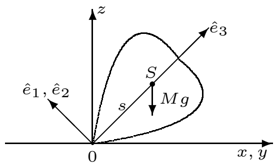

Abbildung 6.4: Zum schweren symmetrischen Kreisel

eine Figur wie in Abb. 6.4.

Jetzt wird das Bezugssystem verschoben, so daß der Schwerpunkt im Koordinatenursprung liegt. Dadurch erfolgt eine Änderung der Trägheitsmomente nach dem Steiner'schen Satz:

$$\Theta_1' = \Theta_2' = \Theta_1 + Ms^2, \qquad \Theta_3' = \Theta_3$$

Somit erhält man die „verschobene“ Rotationsenergie zu

$$\begin{aligned} T_{\text{rot}} &= \frac{\Theta_1'}{2}(\dot\phi^2 \sin^2\theta(\sin^2\psi + \cos^2\psi) + \dot\theta^2(\cos^2\psi + \sin^2\psi)) + \frac{\Theta_3'}{2}(\dot\phi\cos\theta + \dot\psi)^2 \\ &= \frac{\Theta_1'}{2}(\dot\phi^2\sin^2\theta + \dot\theta^2) + \frac{\theta_3'}{2}(\dot\phi\cos\theta + \dot\psi^2). \\ U &= Mgs\cos\theta \qquad \theta = \text{Winkel}(\hat{e}_3, z) \end{aligned}$$

Man kann leicht erkennen, daß $\mathcal{L}$ nicht von ψ, ϕ, t abhängt. Mit Hilfe dieser Symmetrien lassen sich nun die drei Lagrangegleichungen durch drei Dgl. 1. Ordnung ersetzen:

1. Homogenität der Zeit $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} = 0 \Longrightarrow$ Energieerhaltung

$$E = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\phi}\dot\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\psi}\dot\psi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\theta}\dot\theta - L = T_{\text{rot}} + U = const. \tag{6.20}$$

2. Invarianz gegenüber Rotation um z-Achse ($\phi \to \phi + \varepsilon$) $\Longrightarrow$ Drehimpulskomponente L_z ist erhalten

$$L_z = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\phi} = \Theta_1'\dot\phi\sin^2\theta + \Theta_3(\dot\psi + \dot\phi\cos\theta)\cos\theta = const. \tag{6.21}$$

3. Invarianz gegenüber Rotation um $\hat{e}_3$-Achse ($\psi \to \psi + \varepsilon \Longrightarrow$ Drehimpulskomponente L_3 ist erhalten

$$L_3 = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\psi} = \Theta_3(\dot\psi + \dot\phi\cos\theta) = const \Longrightarrow \dot\psi + \dot\phi\cos\theta = \frac{L_3}{\Theta_3} \tag{6.22}$$

Setzt man (6.22) in (6.21) ein, erhält man

$$\dot{\phi} = \frac{1}{\Theta_1' \sin^2\theta}(L_z - L_3\cos\theta).$$

Setzt man dies nun wieder in (6.1) ein, folgt

$$E = \frac{1}{2}\Theta_1'\dot{\theta}^2 + \frac{(L_z - L_3\cos\theta)^2}{2\Theta_1'\sin^2\theta} + \frac{L_3^2}{2\Theta_3} + Mg\cos\theta \tag{6.23}$$

Die Energie hängt nunmehr nur noch von θ ab. Setzt man

$$E' = E - \frac{L_3^2}{2\Theta_3} - Mgs = const$$

und setzt das nun wiederum in (6.23) ein, folgt

$$\begin{aligned} E' &= \frac{1}{2}\Theta_1^2\dot{\theta}^2 + U_{\text{eff}}(\theta) && (6.24) \\ \text{mit } U_{\text{eff}}(\theta) &= \frac{(L_z - Ł_3\cos\theta)^2}{2\Theta_1'\sin^2\theta} - Mgs(1-\cos\theta) \quad (0 < \theta < \pi) && (6.25) \end{aligned}$$

Das effektive Potential von θ sieht ähnlich aus, wie eine nach oben geöffnete Parabel. Es folgt also eine periodische Bewegung in θ zwischen den beiden Umkehrpunkten θ_1 und θ_2.

Gl. (6.25) ist eine Dgl. mit getrennten Veränderlichen, die gelöst und aufgelöst nach t wie folgt aussieht

$$t = t_0 + \int\limits_{\theta_0}^{\theta} -\sqrt{\frac{\Theta_1'/2}{E' - U_{\text{eff}}}}.$$

Die Diskussion der Lösung kann wieder wie im eindimensionalen Fall graphisch ausgeführt werden.

Bei diesem Kreisel ergibt sich zusätzlich zur Präzessionsbewegung der Figurenachse um die z-Achse des „normalen“ kräftefreien Kreisels noch eine Nutationsbewegung (Nickbewegung), was sich darin äußert, daß die Figurenachse des Kreisels nicht mehr regelmäßig präzediert, sondern kleine Schleifchen ausführt.

Bei dem schweren Kreisel ist demnach $\dot{\theta} \neq 0$ und somit bekommt $\vec{\omega}$ noch einen Anteil $\dot{\theta}\hat{e}_K$.

Für große Rotationsenergie erhält man näherungsweise eine freie Bewegung: $\vec{L} \approx const.$

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}\frac{L_3^2}{\Theta_3} + \frac{1}{2}\frac{L_\perp^2}{\Theta_1'}; \qquad \vec{L}_\perp = \vec{L} - L_3\hat{e}_3 \\ L_3 &= L\cos\theta \qquad L_\perp = L\sin\theta \\ E &= \frac{1}{2}L^2\frac{\cos^2\theta}{\Theta_3} \cdot \frac{1}{2}L^2\frac{\sin^2\theta}{\Theta_1'} \end{aligned}$$

Vergleicht man diesen letzen Ausdruck mit dem E weiter oben (indem man $L_z = L, L_3$ ersetzt, erhält man

$$E \approx \frac{1}{2}\Theta_1'\dot{\theta}^2 + \frac{L^2}{2}\frac{(1-\cos^2\theta)^2}{\Theta_1'\sin^2\theta} + \frac{L^2}{2}\frac{\cos^2\theta}{\Theta_3}.$$

Daraus folgt nun insgesamt, daß θ für große Rotationsenergie annähernd konstant bleibt, ale wieder ein kräftefreier Kreisel vorhanden ist.

Die letzen Überlegungen kann men sich recht gut an einem Kinderkreisel verdeutlichen. Wird er in kräftige Rotation versetzt, so präzediert die Figurenachse annähernd regelmäßig. Nimmt die Rotationsenergie hingegen ab, wird die Nutationsbewegung immer deutlicher. Letztlich „eiert“ der Kreisel nur noch und kippt schließlich um.

Kapitel 7

Schwingungen

7.1 Eindimensionale Schwingungen

Betrachtet wird ein System, welches z.B. aus zwei Atomen bestehen mag. Es befinde sich zunächst im Gleichgewicht und wird dann schwach gestört. Es ergibt sich folgende Lagrangefunktion

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = \mathcal{L}_0 - U_{\text{ext}} = \frac{1}{2} a(q) \dot{q} - U(q) - U_{\text{ext}}(q, t)$$

(U_{ext} ist das externe Störpotential)

Für kleine Auslenkungen q_0 um die Ruhelage kann man U bis zum quadratischen Term entwickeln in $(q - q_0)$ und erhält

$$U(q) = U(q_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}q^2} \right)_{q_0} (q - q_0)^2 + \cdots .$$

Der lineare Term entfällt, da die Auslenkung nur minimal sein soll und somit U minimal bleibt ($\left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}q}\right)_{q_0} = 0$).

Setzt man nun $x = q - q_0$, $U_0 = U(q_0)$ und $k = \left(\frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}q^2}\right)_{q_0}$, erhält man die harmonische Näherung des Potentials

$$U(x) := U_0 + \frac{1}{2} k x^2 \tag{7.1}$$

Bei der kinetischen Energie und U_{ext} verfährt man analog und erhält

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} a(q) \dot{q}^2 \approx \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + O(x \cdot x^2) \qquad m = a(q_0) \\ U_{\text{ext}}(q, t) &\approx U_{\text{ext}}(q_0, t) + (q - q_0) \left(\frac{\partial U_{\text{ext}}}{\partial q} \right)_{q_0} + \cdots = -f(t) x \\ & f(t) := - \left(\frac{\partial U_{\text{ext}}}{\partial q} \right)_{q_0} \end{aligned}$$

Aus diesen vereinfachten Größen ergibt sich nun die vereinfachte Lagrangefunktion zu

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}, t) = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{k}{2}x^2 + f(t)x \tag{7.2}$$

und daraus die Bewegungsgleichung

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{1}{m}f(t); \qquad \omega_0^2 = \frac{k}{m}. \tag{7.3}$$

Die Bewegungsgleichung mit Reibungskräften ergibt sich analog (z.B. durch Einsetzen der Rayleigh'schen Dissipationsfunktion $F = \lambda m\dot{x}^2$) zu

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{1}{m}f(t) \tag{7.4}$$

Dies ist eine inhomogene, lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung. Zur Lösung wir zuerst der homogene Teil betrachtet

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{7.5}$$

Diese Gleichung gilt es nun zu lösen. Dies kann entweder mathematisch (Aufstellen des charakteristischen Polynoms, Nullstellen suchen, ...) oder eher physikalisch mit folgendem Ansatz geschehen

$$\text{Ansatz:} \quad x_h(t) = C \cdot e^{i\nu t} \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}e^{i\nu t} = (i\nu)^n \cdot e^{i\nu t}$$

Eigehen in die Differentialgleichung ergibt:

$$(-\nu^2 + 2\lambda i\nu + \omega_0^2)e^{i\nu t} = 0$$

Man hat also die Klammer auf Nullstellen zu untersuchen und erhält so eine quadratische Gleichung für ν mit den Lösungen

$$\nu_{1,2} = i\lambda \pm \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} = i\lambda \pm W_0 \qquad \text{mit } W_0 = \sqrt{\omega^2 - \lambda^2}$$

Somit ergibt sich als Lösung der homogenen Gleichung

$$x_h(t) = C_1 \cdot e^{i\nu_1 t} + C_2 \cdot e^{i\nu_2 t}. \tag{7.6}$$

(Hierbei ist darauf zu achten, daß man bei der physikalischen Interpretation natürlich nur den Realteil der Lösung zu betrachten hat. Die komplexen Zahlen dienen wieder nur als Rechenhilfe.)

Allgemein hat man nun drei Fälle zu unterscheiden:

1. Fall $\lambda < \omega_0 \leadsto W_0$ ist reell, also

$$x_h(t) = \Re\left\{C \cdot e^{-\lambda t + iW_0 t}\right\} = A \cdot e^{-\lambda t} \cdot \cos(W_0 t + \alpha)$$

Man kan leicht erkennen, daß in diesem Fall schwacher Dämpfung die Exponentialfunktion die Einhüllende darstellt, in der der Kosinus schwingt. Es handelt sich also um ein normale gedämpfte Schwingung.

2. Fall $\lambda > \omega_0 \leadsto \nu = i(\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2})$, also

$$x_h(t) = A \cdot e^{-\lambda_1 t} + B \cdot e^{-\lambda_2 t}$$

Bei dieser sehr starken Dämpfung findet keine Schwingung mehr statt, das ausgelenkte Teilchen bewegt sich langsam in seine Nullage zurück, daher nennt man diesen Vorgang „relaxierendes Verhalten“.

3. Fall $\lambda = \omega_0 \leadsto W_0 = 0$, also

$$x_h(t) = (A + Bt) \cdot e^{-\lambda t}$$

In diesem Fall der Grenzdämpfung tritt ebenfalls keine Schwingung mehr auf, jedoch nimmt das ausgelenkte Teilchen schnellstmöglich seine Ruhelage wieder ein.

Somit ist die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung (7.5) bekannt. Wirkt nun aber eine äußere Kraft ein, so gilt es, eine partikuläre Lösung der inhomogene Gleichung (7.4) zu finden.

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

Unter Kenntnis der Störfunktion $f(t)$ kann man nun entweder mittels Variation der Konstanten oder Fouriertransformation (s.u.) diese partikuläre Lösung finden. Hier sei zuerst der Sonderfall der harmonischen Krafteinwirkung gegeben, der sich relativ einfach behandeln läßt.

Man hat also eine Kraft der Art

$$f(t) = f_\omega e^{i\omega t}$$

gegeben. Nun benutzt man den Ansatz

$$x_p(t) = \frac{f_\omega}{m}\tilde{\chi}(\omega)e^{i\omega t}.$$

Dabei nennt man $\tilde{\chi}(\omega)$ „Responsefunktion“ (s.u.).

Durch Eingehen mit $x_p(t)$ in die Dgl. ergibt sich

$$\tilde{\chi}(\omega) := \frac{1}{-\omega^2 + 2i\lambda\omega + \omega_0^2} \tag{7.7}$$

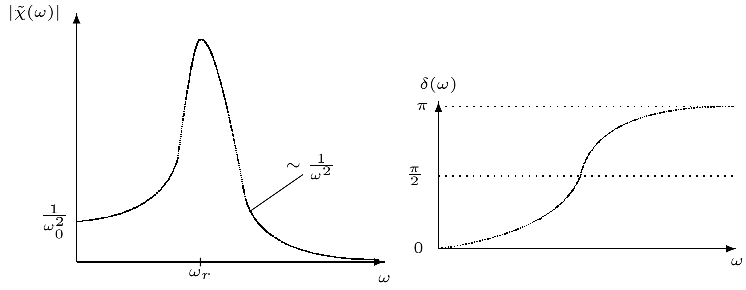

Abbildung 7.1: Amplitude und Phasenverschiebung der Responsefunktion $\tilde{\chi}(\omega)$

Die Responsefunktion beschreibt die Amplitude des Systems. Weiterhin läßt sich die Phasenverschiebung zwischen der anregenden Kraft und des schwingenden „Teilchens“ mittels der Responsefunktion bestimmen (s. Abb. 7.1) Die Amplitude ergibt sich aus

$$|\tilde{\chi}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2+4\lambda^2\omega^2}}$$

Aus der Ableitung dieser Funktion ergibt sich die Lage des Maximums zu

$$\begin{aligned} \omega_r &= \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \\ |\tilde{\chi}(\omega_r)| &= \frac{1}{2\lambda\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}} \end{aligned}$$

Die Phasenverschiebung ergibt sich zu

$$\tan\delta(\omega) = \frac{\Re|\tilde{\chi}(\omega)|}{\Im|\tilde{\chi}(\omega)|} \qquad \delta(\omega) = \arctan\left(\frac{2\lambda\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}\right)$$

In diesem letzten Abschnitt wurde gezeigt, wie man harmonische Störfunktionen (bzw. Krafteinwirkungen auf ein schwingendes System) behandeln kann. Nun wird dazu übergegangen, beliebige Stöfunktionen $f(t)$ in Gl. (7.4) zuzulassen. Diese Dgl.en können dann mittels Fouriertransformation gelöst werden, die im folgenden Abschnitt kurz beschrieben wird.

7.2 Fourierreihen, Fouriertransformation

7.2.1 Fourierreihen

„Wie wir alle bereits in Mathematikvorlesungen gelernt haben“, lassen sich periodische Funktionen $f(t)$ mit Periodenlänge T in eine Fourierreihe entwickeln.

Eine Fourierreihe beschreibt die ursprüngliche Funktion durch Überlagerung von Sinus- und Kosinusfunktiosfunktionen (bzw. komplexen Exponentialfunktionen) verschiedener „Frequenzen“:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \cdot e^{i\omega_n t}; \qquad \omega_n = \frac{2\pi}{T} \cdot n.$$

Dabei sind die Fourierkoeffizienten f_n i.a. komplex.

Nimmt man nun an, daß die Funktion $f(t)$, die man in eine Fourierreihe entwickeln möchte, reell ist, so gilt

$$f^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n^* \cdot e^{-i\omega_n t} = \sum_{n=\infty}^{-\infty} f_{-n}^* e^{i\omega_n t} = f(t)$$
$$\Longrightarrow f_{-n}^* = f_n.$$

Dabei bedeutet f^* das konjugiert Komplexe zu f.

Die Fourierkoeffizienten ergeben sich somit allgemein, durch Umstellen der obigen Gleichungen, aus

$$f_n := \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i\omega_n t} \mathrm{d}t \tag{7.8}$$

Führt man nun eine Kontrolle aus, so ergibt sich

$$\begin{aligned} f_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{n'=-\infty}^{\infty} f_{n'} \cdot e^{i\omega_{n'} t} \cdot e^{-i\omega_n t} \mathrm{d}t = \sum_{n'=-\infty}^{\infty} \frac{f_{n'}}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{i(\omega_{n'} - \omega_n)t} \mathrm{d}t \\ &= \sum_{n'=-\infty}^{\infty} \frac{f_{n'}}{T} \cdot \frac{e^{i(\omega_{n'}-\omega_n)\frac{T}{2}} - e^{-i(\omega_{n'}-\omega_n)\frac{T}{2}}}{i(\omega_{n'} - \omega_n)} \end{aligned} \tag{7.9}$$

Da wegen der Eigenschaften der komplexen Exponentialfunktion gilt:

$$e^{i(\omega n' - \omega_n)\frac{T}{2}} = e^{i\pi(n'-n)} = e^{-i(\omega_{n'} - \omega_n)\frac{T}{2}},$$

folgt aus (7.9)

$$f_n = 0 \quad \text{falls } n' \neq n. \qquad n' = n \Longrightarrow f_n = f_n$$

Geht man nun wieder aus von $f(t)$, so erhält man

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_n f_n e^{i\omega_n t} = \sum_n \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{-\omega_n t'} f(t') e^{i\omega_n t} \mathrm{d}t' = \int_{-T/2}^{T/2} \Delta(t-t') f(t') \mathrm{d}t' \\ \text{mit} \quad \Delta(t-t') &:= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\omega_n (t-t')} = \begin{cases} \to \infty, \text{ f. } t = t' + k \cdot T, k \in \mathbb{Z} \\ 0, \text{ sonst} \end{cases} \end{aligned} \tag{7.10}$$

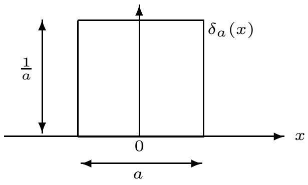

Abbildung 7.2: Die Deltafunktion ergibt sich aus dem Grenzwert des δ_a, welches den Flächeninhalt 1 hat, für $a \to 0$.

Das Δ sorgt dafür, daß alle $t' \neq t$ herausgefiltert werden. Durch das Δ wird letztlich sichergestellt, daß nur die oben definierten diskreten ω's bzw. t's aufsummiert werden.

Es wird nun die sog. „Deltafunktion“ (δ-Funktion) eingeführt. Sie wird (hier graphisch) definiert durch Abb. 7.2 und folgende Gleichungen

$$\begin{aligned} \delta(x) &:= \lim_{a\to 0} \delta_n(x) \\ \int_{x_1}^{x_2} \delta(x)\mathrm{d}x &= 1; \quad \text{f. } x_1 < 0 < x_2 \\ \int_{x_1}^{x_2} f(x)\delta(x)\mathrm{d}x &= f(0)\int_{x_1}^{x_2} \delta(x)\mathrm{d}x = f(0); \quad \text{f. } f(x) \text{ stetig} \end{aligned} \tag{7.11}$$

Weitere Eigenschaften der Deltafunktion sind

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(a \cdot t')\mathrm{d}t' \overset{x=at'}{=} \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{|a|}$$

und

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(h(t'))g(t')\mathrm{d}t' \overset{s.u.}{=} \sum_i \frac{1}{\left|\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t'_i}} g(t'_i).$$

Letzteres gilt, wenn man h in eine Taylorreihe um die Nullstellen (t'_i) von h entwickelt:

$$h(t') = (t' - t'_1) \cdot \left.\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t'}\right|_{t'=t'_1} + \cdots.$$

Damit ergibt sich das Δ aus Gl. (7.10) zu

$$\Delta(t - t') = \sum_m \delta(t - t' - m \cdot T)$$

7.2.2 Fouriertransformation

Bei der Fouriertransformation wird davon ausgegangen, daß sich alle nichtperiodischen Funktionen als Grenzfall periodischer Funktionen auffassen lassen, sofern man die Periodenlänge beliebig groß werden läßt:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \cdot e^{i\omega_n t}; \qquad \omega_n = \frac{2\pi}{T} \Longrightarrow \Delta\omega = \omega_{n+1} - \omega_n \to 0, \quad \text{f. } T \to \infty$$

Der eigentliche Unterschied zu den Fourierreihen besteht nun darin, daß bei der Fouriertransformation nicht diskrete „Frequenzen“ aufsummiert werden, sondern über ein ganzes Spektrum aufintegriert wird, da die ω_n auf der reellen Achse dicht nebeneinander liegen. Außerdem wird bei der Fouriertransformation nicht mehr die urpsrüngliche Funktion durch eine evtl. einfacher zu handhabende „neue“ Funktion ausgedrückt, sondern jeder ursprünglichen Funktion eine best. und feste Fouriertransformierte zugeordnet, mit der man dann irgendwie weiter verfahren kann.
Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{\Delta\omega} f_n \cdot e^{i\omega t} \mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{T \cdot f_n}_{=\tilde{f}(\omega)} \cdot e^{i\omega t} \mathrm{d}\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega) \cdot e^{i\omega t} \mathrm{d}t \end{aligned} \tag{7.12}$$

Außerdem folgt somit aus Gl. (7.8)

$$\boxed{\tilde{f}(\omega) = T \cdot f_n = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{i\omega t} \mathrm{d}t} \tag{7.13}$$

Führt man wieder die Kontrolle durch, ergibt sich

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega) \cdot e^{i\omega t} \mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t') e^{-i\omega t'} \dot{e}^{i\omega t} \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t') \cdot \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-t')} \mathrm{d}\omega \, \mathrm{d}t}_{=\delta(t-t')} \stackrel{(7.11)}{=} f(t) \end{aligned}$$

Somit ergibt sich also eine Integralschreibweise für die Deltafunktion als

$$\delta(t - t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-t')} \mathrm{d}\omega \tag{7.14}$$

Außerdem:

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega')e^{i\omega' t}e^{-i\omega t}\mathrm{d}\omega\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega') \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega'-\omega)t}\mathrm{d}t}_{=2\pi\delta(t-t')}\,\mathrm{d}\omega = \tilde{f}(\omega)
\end{aligned}$$

Damit wäre die Kontrolle erfolgreich beendet.
Führt man zur Abkürzung den Fourieroperator $\mathcal{F}$ ein

$$\mathcal{F} := \int_{-\infty}^{\infty} \quad e^{i\omega t}\mathrm{d}t, \tag{7.15}$$

so läßt sich die Fouriertransformierte wie folgt darstellen

$$\tilde{f}(\omega) = \mathcal{F}[f(t)].$$

Durch wiederholtes Ausführen der Fouriertransformation bekommt man wieder bis auf einen konstanten Faktor und ein Vorzeichen die ursprüngliche Funktion

$$\tilde{\tilde{f}}(\nu) = \mathcal{F}\mathcal{F}[f(t)] = 2\pi f(-\nu) = 2\pi f(\nu) \quad \text{falls } f \text{ gerade}$$

Es folgen nun einige Beispiele, die die Anwendung der Fouriertransformation aufzeigen sollen, bzw. die die Berechnung der Fouriertransformierten veranschaulichen sollen.
1. Beispiel: $f_1(t) = e^{-\gamma|t|}$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \tilde{f}_1(\omega) &= \int_{\infty}^{\infty} e^{-\gamma|t|}\cdot e^{i\omega t}\mathrm{d}t = \int_{0}^{\infty} e^{-(\gamma+i\omega)t}\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^{0} e^{(\gamma-i\omega)t}\mathrm{d}t \\
&= \left.\frac{e^{-(\gamma+i\omega)t}}{-(\gamma+i\omega)}\right|_0^{\infty} + \left.\frac{e^{(\gamma-i\omega)t}}{\gamma+i\omega}\right|_{-\infty}^{0} = \frac{2\gamma}{\omega^2+\gamma^2}
\end{aligned}$$

Dieses $\tilde{f}_1(\omega)$ nennt man „Lorentzfunktion“. Führt man mit der Lorentzfunktion wieder ein Fouriertransformation durch, so ergibt sich wieder die Exponentialfunktion f_1
2. Beispiel: $f_2(t) = \frac{2\gamma}{t^2+\gamma^2}$

$$\rightsquigarrow \tilde{f}_2(\omega) = e^{-\gamma|\omega|}$$

3. Beispiel: Gaußfunktion, $f_3(t) = e^{-\alpha t^2}$

$$\tilde{f}_3(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t^2 - i\omega t}\mathrm{d}t \tag{7.16}$$

vorausgesetzt wird die Kenntnis von

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$$

Schreibt man nun noch den Exponenten in Gl. (7.16) mittels quadratischer Ergänzung um

$$-\alpha t^2 - i\omega t = -\alpha \left(t + \frac{i\omega}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\omega^2}{4\alpha}$$

so ergibt sich die Fouriertransformierte $\tilde{f}_3$ zu

$$\tilde{f}_3(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\left(t+\frac{i\omega}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\omega^2}{4\alpha}} \mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \cdot e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}.$$

Der letzte Schritt gilt, da die Gaußfunktion invariant gegenüber einer endlichen Verschiebung der Integrationsgrenzen ist

$$\int_{-\infty-\frac{i\omega}{2\alpha}}^{\infty-\frac{i\omega}{2\alpha}} e^{-\alpha t^2} \mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

Man hat also aus der Fouriertransformation der Gaußfunktion wieder eine Gaußfunktion bekommen, jedoch verhält sich, die Breite bzw. Schärfe der Transformierten im umgekehrten Verhältnis zur Breite bzw. Schärfe der ursprünglichen Funktion. (Die Breite von f_3 ist proportional zu $1/\sqrt{\alpha}$, die von $\tilde{f}_3$ zu $\sqrt{\alpha}$.) Aus dieser Erkenntnis läßt sich ein Zusammenhang zwischen Breite und Schärfe bei Gaußfunktionen ermitteln, der da lautet: $\Delta t \Delta w \approx 1$. Aus ähnlichen mathematischen Beziehungen ergibt sich auch die Heisenberg‘sche Unschärferelation.

Eine ähnliche Schärfe/Breite-Beziehung tritt bei der Deltafunktion auf

4. Beispiel: $f_4(t) = \delta(t) \rightsquigarrow \tilde{f}_4(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-i\omega t} \mathrm{d}t = 1$

7.3 Fouriertransformation und Schwingungsdgl.

Mittels der oben beschriebene Fouriertransformation kann man nun versuchen, daß eigentlichen Problem (das Lösen der Schwingungsgleichung (7.4)), in den Griff zu bekommen.

$$\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{1}{m} f(t)$$

Jetzt kann man das $x(t)$ und das $f(t)$ fouriertransformiert darstellen durch

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(\omega)\cdot e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega \\ f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega)\cdot e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega. \end{aligned}$$

Da sich die n-te Ableitung der komplexen Exponentialfunktion zu

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}e^{i\omega t} = (i\omega)^n e^{i\omega t}$$

ergibt, läßt sich die Dgl. durch Einsetzen der letzten drei Gleichungen wie folgt schreiben

$$\Longrightarrow \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[-\omega^2+2i\lambda\omega+\omega_0^2\right]\tilde{x}(\omega)e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{m}\tilde{f}(\omega)e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega$$

Um nun die Gleichheit der beiden Seiten für alle t zu gewährleisten, müssen die Fourierkoeffizienten übereinstimmen

$$\begin{gathered} \rightsquigarrow \left[-\omega^2+2i\lambda\omega+\omega_0^2\right]\tilde{x}(\omega) = \tfrac{1}{m}\tilde{f}(\omega) \\ \Longrightarrow \tilde{x}(\omega) = \tfrac{1}{m}\tilde{\chi}(\omega)\tilde{f}(\omega) \end{gathered}$$

mit $\tilde{\chi}$, der Responsefunktion (s.o.).

Sofern man also nun Kenntnis der Fouriertransformierten $\tilde{f}$ besitzt, kann man nun die Fourierrücktransformation durchführen und erhält

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\tilde{\chi}(\omega)\frac{1}{m}\tilde{f}(\omega)e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_1 t_1}\chi(t_1)\mathrm{d}t_1 \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t_2}f(t_2)\mathrm{d}t_2\right)\mathrm{d}\omega \end{aligned}$$

Da außerdem gilt

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-t_1-t_2)}\mathrm{d}\omega = \delta(t-t_1-t_2) \Longrightarrow t_1 = t-t_2,$$

folgt für $x(t)$

$$\boxed{x(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\chi(t-t_2)f(t_2)\mathrm{d}t_2} \tag{7.17}$$

Anhand dieser Gleichung kann man sehen, daß die Wirkung der Kraft zur Zeit t_2 einen Beitrag zur Auslenkung zur Zeit $t > t_2$ ergibt.

Weiterhin muß gelten, daß zukünftige Beiträge der Kraft keinen Einfluß auf die augenblickliche Auslenkung haben dürfen (das nennt man „Kausalität“) und somit muß gelten

$$\chi(t - t_2) = 0 \quad \text{f. } t < t_2.$$

Das Problem besteht also nun darin, zu zeigen, daß dieses χ für $t < t_2$ tatsächlich verschwindet. Das kann dadurch gezeigt werden, daß man die Fouriertransformierte $\tilde{\chi}$ durch nochmaliges Transformieren in die Funktion χ überführt.

$$\chi(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \tilde{\chi}(\omega)e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{-1}{\omega^2 - 2i\lambda - \omega_0^2}e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega \tag{7.18}$$

Soweit wurde einfach nur stur die Definition der Fouriertransformation angesetzt. Nun muß man „nur“ noch dieses Integral bestimmen, was hier „der Einfachheit halber“ durch komplexe Integration getan werden soll.

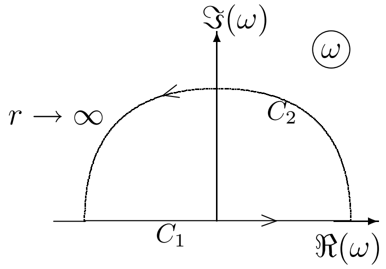

Abbildung 7.3: Zum Aufbau der komplexen Zahlenebene und der komplexen Integration über die Wege C_1 und C_2.

Dazu muß man sich zuerst einmal die komplexe Zahlenebene vor Augen halten, die man sich auch aus zwei Halbkreisen (mit den jeweiligen Durchmessern auf der reellen Achse) mit dem Radius unendlich aufgebaut denken kann. (s. Abb. 7.3)

Weiterhin gilt es zu bedenken, daß man als Ergebnis des Integrals nur die Integration längs der reellen Achse erhalten will und somit notwendigerweise die Integration längs C_2 keinen Beitrag liefern darf. Dies wird erreicht, indem man für $t > 0$ auf dem oberen und für $t < 0$ auf dem unteren „Halbkreis“ der komplexen Ebene integriert, da dann die e-Funktion im Unendlichen verschwindet und das Integral längs des Weges C_2 ebenfalls verschwindet.

Nun muß man nur noch wissen, daß Kreisintegrationen (wie hier über die Wege C_1 und C_2 in der komplexen Zahlenebene immer den Wert Null haben, wenn keine Singularitäten (Polstellen) auftreten. Ist dies der Fall, so ergibt sich das (große)

Kreisintegral aus den Kreisintegralen um die Singularitäten, da man aufgrund der ersten Aussage das eigentliche Kreisintegral beliebig um die Singularitäten „herumbiegen“ kann (s. Abb. 7.4).

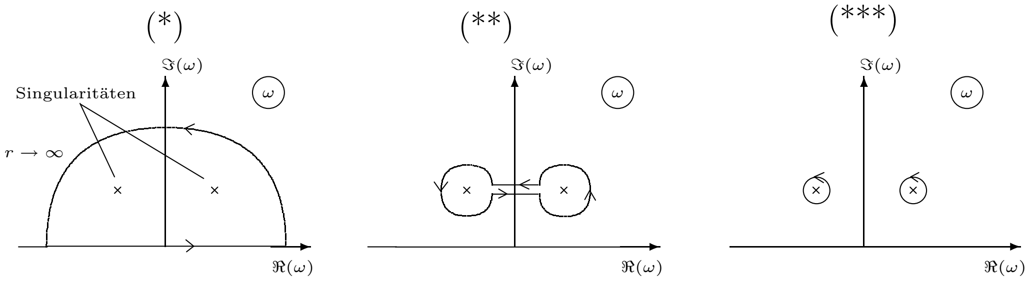

Abbildung 7.4: Man kann den Integrationsweg (bis auf die Singularitäten) beliebig verbiegen, so daß aus (*) letztlich (***) wird.

Die beiden in Abb. 7.4 eingezeichneten Singularitäten stellen die Pole der Responsefunktion $\tilde{\chi}$ dar. Man erhält sie, indem man den Nenner von $\tilde{\chi} = 0$ setzt zu

$$\omega_{1,2} = i\lambda \pm \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$$

Es muß also (wie beschrieben) nur noch der Wert der Integration um die Singularitäten der Funktion $\tilde{\chi}$ bestimmt werden. Dazu eine Nebenbetrachtung:

Gegeben sei die komplexe Funktion $\frac{1}{\omega}$, die also an der Stelle 0 eine Polstelle hat. Das Kreisintegral um den Pol ergibt sich zu

$$\frac{1}{2\pi} \oint \frac{1}{\omega} \mathrm{d}\omega \tag{7.19}$$

Transformiert man nun die komplexe Zahl ω in Kugelkoordinaten

$$\omega = r \cdot e^{i\phi} \Longrightarrow \mathrm{d}\omega = r \cdot \mathrm{d}e^{i\phi} = r \cdot i \cdot e^{i\phi}\mathrm{d}\phi,$$

so erhält man aus (7.19)

$$\Longrightarrow (7.19) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} ire^{i\phi} \cdot \frac{1}{re^{i\phi}} \mathrm{d}\phi = i$$

Daraus folgt nun der sog. *Residuensatz*

$$\oint \frac{1}{\omega - \omega_p} z(\omega) \mathrm{d}\omega = 2\pi i z(\omega_p) \qquad \text{Residuensatz}, \tag{7.20}$$

der besagt, daß sich das Kreisintegral um den Pol einer komplexen Funktion, $\frac{1}{\omega} \cdot z(\omega_p)$ aus dem Funktionswert der „normalen“ Funktion z an der Stelle $\omega_p =$

ω(am Pol) multipliziert mit $2\pi i$ ergibt. (Der Residuensatz besagt vermutlich noch mehr, mehr wird aber zum Ausrechnen der Responsefunktion nicht benötigt).

Wendet man nun den Resiuduensatz auf Gl. (7.18) an, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
\chi(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{-1}{(\omega-\omega_1)/\omega-\omega_2)} \cdot e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega \\
&\overset{(7.20)}{=} = -\frac{1}{2\pi}2\pi i\left(\frac{1}{\omega_1-\omega_2}e^{i\omega_1 t} + \frac{1}{\omega_2-\omega_1}e^{i\omega_2 t}\right) \\
&= -i\frac{1}{2\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}}\left(e^{i\omega_1 t}-e^{i\omega_2 t}\right)
\end{aligned}$$

Somit wäre also der Fall $t>0$ abgeschlossen. Nun muß aber noch der Fall $t<0$ betrachtet werden:

In diesem Fall integeriert man über den (nicht in den Abbildungen eingezeichneten) unteren Halbkreis. Man wendet nun einfach den oben erhaltenen Residuensatz an und erhält, da auf dem unteren Halbkreis keine Singularitäten vorhanden sind, das Ergebnis 0.

Somit ergibt sich also als Ergebnis für das gesuchte $\chi(t)$

$$\chi(t) = -i\frac{1}{2\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}}\left(e^{i\omega_1 t}-e^{i\omega_2 t}\right)\cdot\Theta(t), \tag{7.21}$$

mit der Stufenfunktion

$$\Theta = \begin{cases} 1, & \text{f. } t>0 \\ 0, & \text{f. } t<0 \end{cases} \tag{7.22}$$

Somit ist gezeigt, daß die Funktion χ tatsächlich für $t<t_0$ verschwindet und somit die Kausalität gewährleistet ist.

Das Fazit dieser Rechnerei besteht also darin, daß man anhand der Lage der Singularitäten erkennen kann, ob die Kausalität verletzt wird oder nicht. Liegen die Singularitäten im positiven imaginären Bereich, so ist die Kausalität gewährleistet, andernfalls nicht.

Eine weitere Möglichkeit das Integral (7.18) zu lösen besteht in der „normalen“ Integration:

$$\chi(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{-1}{\omega_1-\omega_2}\left(\frac{1}{\omega-\omega_1}-\frac{1}{\omega-\omega_2}\right)e^{i\omega t} = -\frac{1}{\omega_1-\omega_2}\left(F_1(t)-F_2(t)\right) \tag{7.23}$$

Nun gilt es, die oben auftretenden F_i zu bestimmen. (hier: nur F_1)

$$F_1(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\omega-\omega_1}e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega$$

Betrachtet man nun die Ableitung von F_1,

$$\frac{\mathrm{d}F_1}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{i(\omega-\omega_1)+i\omega}{\omega-\omega_1}\mathrm{d}\omega = i\delta(t) + i\omega_1 F_1(t), \tag{7.24}$$

so kann man erkennen, daß sich hier eine Dgl. 2. Ordnung ergeben hat

An dieser Stelle muß man wissen, daß sich die Deltafunktion als Ableitung der Stufenfunktion $\Theta(t)$ (s. Gl.(7.22)) ergibt

$$\delta(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Theta(t) \qquad \int\limits_{t_1}^{t_2} \delta(t)\mathrm{d}t = \Theta(t)|_{t_1}^{t_2} = 1,\ \text{f. } t_1 < t < t_2$$

Folgender Ansatz „drängt sich demnach auf“:

$$F_1(t) = i\Theta(t)\cdot\tilde{F}_1(t),\ \text{mit } \tilde{F}_1(t) = 1,\ \text{f. } t = 0 \tag{7.25}$$

Geht man nun mit (7.25) in (7.24) ein, so erhält man

$$\Longrightarrow \tilde{F}_1(t) = e^{i\omega_1 t},$$

wodurch der Ansatz bestätigt wurde.

Setzt man nun noch das F_1 und das F_2, welches sich analog ergibt in Gl. (7.23) ein, so erhält man für $\chi(t)$ den gleichen Ausdruck, wie bei der komplexen Integration.

7.4 Green'sche Funktion

Die Green'sche Funktion ist (hier) wie folgt definiert:

$$\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + 2\lambda\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\right] G(t-t') = \delta(t-t') \tag{7.26}$$

Setzt man für $\delta(t) = \frac{1}{m}f(t)$ ein, so ergibt sich $G(t) = x(t)$. Man hätte also die „normale“ Schwingungsdgl. wieder erhalten.

Für beliebige Kräfte $f(t)$ geht man nun wie folgt vor: Man multipliziert Gl. (7.26) mit $\frac{1}{m}f(t')\mathrm{d}t'$ durch und intgegriert auf beiden Seiten.

$$\int \left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + 2\lambda\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\right] G(t-t')\frac{1}{m}f(t')\mathrm{d}t' = \int \delta(t-t')\frac{1}{m}f(t')\mathrm{d}t'$$

Nun erhält man durch Vergleich dieser Gleichung mit der Schwingungsdgl. (7.4)

$$\boxed{x(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(t-t')\frac{1}{m}f(t')\mathrm{d}t'} \tag{7.27}$$

Anhand dieses Ergebnisses kann man erkennen, daß man, sofern die Green'sche Funktion bekannt ist, für jede bel. Kraft die Funktion $x(t)$ bestimmen kann. Wie man durch Vergleich der letzten Gleichung mit Gl. (7.17) erkennen kann, ist im Falle des harmonischen Oszillators die Green'sche Funktion gerade durch die Responsefunktion $\chi(t)$ gegeben.

Anhand dieser letzten Tatsache kann man auch die „Funktionsweise“ der Green'schen Funktion verstehen. Sie „sammelt“, wie man am Beispiel der Responsefunktion erkennen kann, punktförmige Eindrücke (hier Kräfte) auf und beschreibt die Wirkung des Systems auf diese Kräfte.

Weiterhin ist erwähnenswert, daß das obige Verfahren, mit dem man aus der Green'schen Funktion unter Kenntnis der (bel.) Kraft mit allen linearen Dgl. funktioniert, nur hat man dann evtl. keine „Kräfte“ und eine anders strukturierte Green'sche Funktion.

7.5 harmonische Schwingungen in 3 Dimensionen

Im Falle der harmonischen Schwingungen in alle 3 Raumrichtungen sei wieder ein (hier natürlich räumliches) Potential vorgegeben, mit dem wieder, wie im Fall der eindimensionalen Schwingungen (s. Anschn. 7.1) verfahren wird. (Entwicklung bis zum quadratischen Glied usw.)

$$U(x_1, x_2, x_3) \overset{\text{entw.}}{=} U(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{3} \left.\frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{x_i(0)} (x_i - x_i(0))(x_j - x_j(0))$$

Dabei ist $\partial^2 U/\partial x_i \partial x_j$ eine symmetrische, reelle Matrix, die im weiteren Verlauf mit V_{ij} bezeichnet wird!

Wählt man nun den Nullpunkt so, daß $\vec{x}(0) = 0$ gilt, so erhält man

$$U(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{3} V_{ij} x_i x_j$$

Man diagonalisiert nun $\underline{V}$ durch orthogonale Transformation und betrachtet die Matrix im gedrehten Koordinatensystem KS', welches „parallel“ zu den Hauptachsen liegt.

$$V'_{ij} = m \begin{pmatrix} \omega_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_3^2 \end{pmatrix}$$

Die gedrehten Koordinaten ergeben sich zu

$$x'_i = \sum_J \alpha_{ij} x_j \qquad x_i = \sum_j \alpha_{ij}^T x'_j$$

mit einer Drehmatrix $\underline{\alpha}$ für die gilt $\underline{\alpha}\,\underline{\alpha^T} = \underline{I}$

Stellt man nun die Lagrangegleichung mit diesen gedrehten Koordinaten auf, erhält man

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \sum_{i=1}^{3} \left[\frac{m}{2} (\dot{x}_i')^2 - \frac{m}{2} \omega_i (x_i')^2 \right] \\ \Longrightarrow x_i(t) &= \sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij}^T \left[A_j \cdot \cos(\omega_j t + \alpha_j) \right] \end{aligned}$$

Aus dem recht komplizierten Fall mit drei gekoppelten Dgl. wurde somit durch die orthogonale Transformation ein System mit drei entkoppelten normalen Schwingungsgleichungen, die man mit dem üblichen Ansatz lösen konnte.

7.6 Systeme mit vielen Freiheitsgraden

Im folgenden Abschnitt werden Systeme mit mehreren Freiheitsgraden, das können z.B. Moleküle mit mehreren Atomen oder Kristalle sein, behandelt.

Zuerst wird die Lagrangefunktion mit verallgemeinerten Koordinaten aufgestellt:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{f} a_{ij}(q_1, \ldots, q_f) \dot{q}_i \dot{q}_j - U(q_1, \ldots, q_f)$$

Es wird wieder die harmonische Näherung durchgeführt:

$$L_h = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{f} (T)_{ij}\, \dot{x}_i \dot{x}_j - V_{ij} x_i x_j$$

mit $T_{ij} = a_{ij}(q_1(0), \ldots, q_f(0))$, $V_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial q_j \partial q_j}|_0$ und $x_i = q_i - q_i(0)$.
Damit ergeben sich die Lagrange'schen Bewegungsgleichungen zu

$$\sum_{i,j=1}^{f} (T_{ij} \ddot{x}_j + V_{ij} x_j) = 0 \quad i = 1, \ldots, f$$

Geht man in diese Gleichung mit dem allg. Ansatz

$$x_j = A_j e^{i\omega t},$$

dann ergibt sich ein lineares homogenes Gls. für die Eigenvektoren A_j des Dgl.-Systems

$$\sum_i (V_{ij} - \omega^2 T_{ij}) = 0$$

Dieses Gls. kann nur dann gelöst werden, wenn seine Determinante verschwindet

$$\Longrightarrow \det(\underline{V} - \omega^2 \underline{T}) = 0$$

Aus dieser Determinante ergibt sich ein Polynom f-ten Grades, dessen Nullstellen die Lösungen ω_k^2, die „Eigenwerte“, bzw. Eigenfrequenzen ergeben. ($\omega_{k_{1,2}} = \pm|\omega_k|$)

Anmerkungen: Die Matrix $\underline{V} - \omega^2 \underline{T}$ ist symmetrisch und reell, also diagonalisierbar. Die Matrix $a_{ij} = A_i^{(k)}$ diagonalisiert $\underline{V}$ und $\underline{T}$ gleichzeitig. (Weiteres s. Fließbach S.240ff)

Kapitel 8

Hamiltonformalismus

Der Hamiltonformalismus ähnelt in einigen Punkten dem Lagrangeformalismus, der auch benötigt wird, ist aber in der Quantenmechanik von größerer Bedeutung. Die gemeinsame Grundlage haben die beiden Formalismen im Hamilton'nschen Prinzip (Prinzip der kleinsten Wirkung).

8.1 die kanonischen Gleichungen

Es wird der bereits vom Lagrangeformalismus bekannte verallgemeinerte Impuls eingeführt

$$p_i := \tfrac{\partial \mathcal{L}(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}_i} \Longrightarrow \dot{q}_i = \dot{q}_i(q,p,t)$$

Nun wird die „Hamiltonfunktion" durch eine sog. „Legendre-Transformation" (einen Variablenwechsel) eingeführt. Sie ergibt sich aus der Lagrangefunktion, hängt aber nicht mehr von $q, \dot{q}$ und t ab, sondern von q, p und t. Bereits bekannt ist, daß die Hamiltonfunktion H die Energie E des Systems darstellt. Der „richtige" Weg, zur Hamiltonfuntion und letztlich zu den Hamilton'schen Bewegungsgleichungen zu gelangen wäre wohl ebenfalls wieder über das Prinzip der kleinsten Wirkung gegangen (was am Beispiel der Lagrangegleichungen im Abschnitt 4.2.1 verdeutlicht wurde. (s. auch unten))

Ein anderer Weg: Bildet man jetzt vergleichsweise die vollständigen Differentiale von $\mathcal{L}$ und H:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\mathcal{L} &= \sum_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \mathrm{d}q_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \mathrm{d}\dot{q}_i \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \mathrm{d}t \\ &\overset{(8.3)}{=} \sum_i \left(\dot{p}_i \mathrm{d}q_i + p_i \mathrm{d}\dot{q}_i \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \\ \mathrm{d}H &= \sum_i \left(\dot{q}_i \mathrm{d}p_i + p_i \mathrm{d}\dot{q}_i - \dot{p}_i \mathrm{d}q_i - p_i \mathrm{d}\dot{q}_i \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \end{aligned} \tag{8.1}$$

$$= \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \mathrm{d}p_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \mathrm{d}q_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} \mathrm{d}H \tag{8.2}$$

dabei wurde die Lagrangegleichung

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \dot{p}_i \tag{8.3}$$

verwendet. Durch Vergleich der letzten beiden Gleichungen erhält man

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}.$$

Außerdem erhält man durch Koeffizientenvergleich aus dem vollst. Differential der Hamiltonfunktion die „Hamilton'schen Bewegungsgleichungen".

$$\boxed{\dot{q}_i := \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad \dot{p}_i := -\frac{\partial H}{\partial q_i}} \tag{8.4}$$

Das sind im Gegensatz zu den Lagrangegleichungen (eine Dgl. 2.Ord.) zwei Dgl. 1. Ordnung, die es dann zu lösen gilt. Es folgen zwei Beispiele, die die Vorteile des Hamiltonformalismus aufzeigen sollen
Bsp.1: Teilchen im Potential:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 - V(r); \qquad \vec{p} = m\dot{\vec{r}} \\ H &= \frac{1}{2m} \vec{p}^2 + V(r) \end{aligned}$$

Somit ergeben sich die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen zu

$$\dot{\vec{r}} = \frac{\vec{p}}{m} \qquad \dot{\vec{p}} = -\vec{\nabla} V$$

Bsp.2: Teilchen im elektromagentischen Feld (Ladung e) Die Lagrangefunktion ergibt sich (vgl. (3.9)) zu

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 - e\phi(\vec{r}, t) + \frac{e}{c} \vec{A}(\vec{r}, t) \cdot \dot{\vec{r}}$$

Zur Erinnerung: $\phi(\vec{r}, t)$ und $\vec{A}(\vec{r}, t)$ sind die elm. Potentiale, es gilt $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ und $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\dot{\vec{A}}$.
Somit ergibt sich der kanonische Impuls zu

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_i} = m\dot{\vec{r}}_i + \frac{e}{c} A_i$$

und damit die Hamiltonfunktion zu

$$H = \vec{p}\dot{\vec{r}} - \mathcal{L} = \frac{1}{2m} (\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A})^2 + e\phi$$

Anhand dieser Gl. kann man wieder gut erkennen, daß H eigentlich nur die Energie des System darstellt, denn der erste Term stellt die kinetische, der zweite die potentielle Energie dar.
Die Bewegungsgleichungen lauten dann

$$\begin{aligned}
\dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial r_i} = \frac{1}{m}\underbrace{(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A})}_{=m\dot{\vec{r}}} \cdot \frac{\partial}{\partial r_i}\frac{e}{c}\vec{A} - e\frac{\partial \phi}{\partial r_i} \\
m\ddot{r}_i &= \dot{p}_i - \frac{e}{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A_i = \frac{e}{c}\dot{\vec{r}}\frac{\partial}{\partial r_i}\vec{A} - e\frac{\partial \phi}{\partial r_i} - \frac{e}{c}\dot{\vec{r}}\vec{\nabla}A_i - \frac{e}{c}\frac{\partial A_i}{\partial t} \\
&= eE_i + \underbrace{\frac{e}{c}\sum_j \dot{r}_j\left(\frac{\partial}{\partial r_i}A_j - \frac{\partial}{\partial r_j}A_i\right)}_{=(\dot{\vec{r}}\times\vec{B})_i}
\end{aligned}$$

8.2 Poisson'sche Klammern

Im folgenden werden die „Poisson'schen Klammern“ eingeführt, die eine kürzere Notation best. Zusammenhänge erlauben und somit dazu beitragen, die Übersicht nicht zu verlieren (ein angeblich sehr wichtiger Aspekt in der Theoretischen Physik).
Es sei eine Funktion $f(q,p,t)$ gegeben. Man bildet die totale Zeitableitung

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i}\dot{p}_i\right) \\
&\overset{(8.4)}{=} \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right) \\
&= \frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\}
\end{aligned}$$

mit der Poissonklammer $\{H,f\}$. Für zwei beliebige Funktionen $f(q,p,t)$ und $g(q,p,t)$ ergibt sich die Poissonklammer zu

$$\{g, f\} := \sum_i\left(\frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{\partial g}{\partial q_i}\frac{\partial f}{\partial p_i}\right) \tag{8.5}$$

Die Poissonklammer hat folgende Eigenschaften

i) $\{f,g\} = -\{g,f\}$.

ii) $\{f,c\} = 0$, falls $c = konst.$

iii) $\{f_1 + f_2, g\} = \{f_1, g\} + \{f_2, g\}$.

iv) $\frac{\partial}{\partial t}\{f,g\} = \left\{\frac{\partial}{\partial t}f, g\right\} + \left\{f, \frac{\partial}{\partial t}g\right\}$.

v) $\{f, q_i\} = \frac{\partial f}{\partial p_i} \qquad \{f, p_i\} = -\frac{\partial f}{\partial q_i}$.

vi) $\{q_i, q_j\} = 0; \qquad \{p_i, p_j\} = 0; \qquad \{p_i, q_j\} = \delta_{ij}$.

vii) $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$ (Jacobi-Identität).

In der Quantenmechanik entsprechen den Poissonklammern sog. „Kommutatoren“, die Beziehungen zwischen Operatoren festlegen (bzw. darstellen):

$$\{A, B\} \Rightarrow [\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}.$$

8.2.1 Poisson’sches Theorem

Unter der Voraussetzung, daß f und g Erhaltungsgrößen sind, also gilt

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = 0 &\iff \{f, H\} = 0 \\ \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} = 0 &\iff \{g, H\} = 0, \end{aligned}$$

gilt auch

$$\{\{f, g\}, H\} = 0. \quad \text{(Beweis mit Jacobi-Identität)}$$

d.h. $\{g, h\}$ ist eine Erhaltungsgröße. Man kann somit „neue“ Erhaltungsgrößen berechnen, sofern zwei bekannt sind. Es ist jedoch nicht gesagt, daß sinnvolle Größen aus der Poissonklammer entstehen, insbes. kann auch 0 eine Erhaltungsgröße sein, die auf diese Weise gefunden wird.

8.3 Kanonische Transformationen

Ebenso wie bei der Einführung der Lagrangefunktion, als es sich als sinnvoll erwies, die „normalen“ kartesischen Kooerdinaten x_i zugunsten sog. verallgemeinerter Koordinaten q_i aufzugeben, ist es sinnvoll nun bei der Hamiltonfunktion „verallgemeinerte verallgemeinerte“ Koordinaten zu generieren, deren Abhängigkeiten von den „alten“ verallgemeinerten Koordinaten wie folgt aussieht

$$Q_i = Q_i(p, q, t); \quad P_i = P_i(q, p, t)$$

Diese Koordinaten müssen selbstverständlich einer Bedingungen gehorchen. Es müssen sich kovariante Bewegungsgleichungen aus der „neuen“ Hamiltonfunktion ergeben, es muß also gelten

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H'}{\partial P_i}; \qquad \dot{P}_i = \frac{\partial H'}{\partial Q_i}.$$

8.3.1 Ableitung der Hamilton'schen Gleichungen mittels Variationsprinzip

Man geht wie bei der Herleitung der Lagrangegleichung, bzw. der allgemeinen Herleitung der Euler'schen Gleichungen vor (s. Abschn. 4.1): Man minimiert die Wirkung der (durch die Hamiltonfunktion ausgedrückten) Lagrangefunktion, wodurch sich letztlich die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen ergeben.

$$\delta \int \left(\sum_i p_i \mathrm{d}q_i - H \mathrm{d}t \right) = 0 \tag{8.6}$$

Man führt nun die Variation analog den Gln. (4.1) -(4.8) durch:

$$\begin{aligned}
&\textstyle\int \sum_i \; (\delta p_i \mathrm{d}q_i + p_i \mathrm{d}(\delta q_i)) - \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \right) \mathrm{d}t \\
&= \int \sum_i \left[\underbrace{\left(\mathrm{d}q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \mathrm{d}t \right)}_{=:(A)} \delta p_i + \underbrace{\left(-\mathrm{d}p_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \mathrm{d}t \right)}_{=:(B)} \delta q_i \right] = 0
\end{aligned}$$

Daraus folgt wiederum, daß beide Klammern (A) und (B) verschwinden müssen, woraus wiederum die gesuchten Hamilton'schen Bewegungsleichungen folgen

$$(A) = 0 \Longrightarrow \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad (B) = 0 \Longrightarrow \dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial q_i}$$

Minimiert man nun die Wirkung für die „neuen“ verallgemeinerten Koordinaten Q_i, P_i und die zugehörige Hamiltonfunktion H' durch

$$\delta \int (\sum_i P_i \mathrm{d}Q_i - H' \mathrm{d}t) = 0,$$

so darf sich dieser letzte Ausdruck von (8.6) nur durch ein vollständiges Differential einer Funktion $F(Q, q, t)$ unterscheiden.

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \mathrm{d}F(Q, q, t) &= \sum_i p_i \mathrm{d}q_i - \sum_i P_i \mathrm{d}Q_i + (H' - H) \mathrm{d}t \qquad (8.7) \\
&= \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \mathrm{d}q_i + \frac{\partial F}{\partial Q_i} \mathrm{d}Q_i \right) + \frac{\partial F}{\partial t} \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Somit ergeben sich unter Kenntnis der Funktion F und der Koordinaten q, Q die beiden fehlenden Koordinaten p, P zu

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i}; \qquad P_i = -\frac{\partial F}{\partial Q_i}; \qquad H' = H + \frac{\partial F}{\partial t}. \tag{8.8}$$

Aus der „normalen“ Hamiltonfunktion in Abhänngigkeit von den „normalen“ verallgemeinerten Variablen (q, p) ergibt sich nun die (hoffentlich einfachere) Hamiltonfunktion mit den kanonisch transformierten Variablen (Q, P), indem man mit den beiden obigen Gleichungen und der Beziehung $\partial F/\partial t = H' - H$ die „kleinen“ Variablen (q, p) in der Hamiltonfunktion ersetzt.
Die Variablen (q, p) und (Q, P) nennt man kanonisch konjugiert.
Anstelle des Ausgangsvariablenpaars (q, Q) kann man auch $(q, P$ „benutzen“, man muß dann nur in Gl. (8.7) sog. Legendre-Transformationen durchführen, d.h. in diesem Fall wohl, daß man von eben dieser Gl. $-\sum_i P_i Q_i$ abziehen muß. Man erhält dann

$$\begin{gathered}\mathrm{d}(F(q, Q, t) + \sum_i P_i Q_i) = \mathrm{d}\phi(q, P, t) = \sum_i p_1 \mathrm{d}q_i + \sum_i Q_i \mathrm{d}P_i + (H' - H)\mathrm{d}t \\ \Longrightarrow p_i = \tfrac{\partial \phi}{\partial q_i}; \qquad Q_i = \tfrac{\partial \phi}{\partial P_i}; \qquad H' = H + \tfrac{\partial \phi}{\partial t}.\end{gathered}$$

In folgenden Abschnitt wird das „Verhalten“ der Poissonklammern bzgl. der kanonischen Transformationen behandelt. Es wird sich zeigen, daß die Poissonklammern invariant bleiben, wenn man von einem Satz kanonischer Variablen zum anderen wechselt.

Die Poissonklammern sind definiert (s. Abschn. 8.2) als

$$\{f, g\}_{pq} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \right),$$

somit ergeben sich die Beziehungen

$$\{q_i, q_j\} = 0; \qquad \{p_i, p_j\} = 0; \qquad \{p_i, q_j\} = \delta_{ij}.$$

Durch diverse Rechnungen läßt sich dann folgendes verifizieren:

$$\{f, g\}_{pq} = \{f, g\}_{PQ} = \cdots.$$

Eine andere Möglichkeit, sich diesen Sachverhalt zu verdeutlichen, besteht darin, daß man die Funktion g als Hamiltonfunktion auffaßt und dann die Poissonklammern bestimmt. Man erhält dann wohl mit

$$\{f, g\} = -\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$$

eine Zeitableitung, die unter der kanonischen Variablentransformation invariant bleibt, es gilt also auch ganz analog

$$\{Q_i, Q_k\}_{pq} = \{P_i, P_j\}_{pq} = 0; \qquad \{Q_i, P_j\}_{pq} = \delta_{ij}; \qquad \{q_i, q_j\}_{PQ} = 0; \quad \text{etc.}$$

Für die folgenden Überlehungen ist es wichtig, daß man sich verdeutlicht, daß eine zeitliche Verschiebung ebenfalls eine kanonische Transformation darstellt.

Wenn man also

$$q_t = q(t); \qquad p_t = p(t)$$

setzt, und nun die kanonisch konjugierten Variablen wie folgt erklärt,

$$\begin{aligned} Q &= q_{t+\tau} = q_{t+\tau}(q_t, p_t, t) \\ P &= p_{t+\tau} = p_{t+\tau}(q_t, p_t, t). \end{aligned}$$

ergibt sich, daß diese trivialerweise den kanonischen Bewegungsgleichungen genügen, da sowohl (q_t, p_t), als auch $(q_{t+\tau}, p_{t+\tau})$ dies tun.

8.4 Phasenraum, Liouville'scher Satz

Jeder Zustand eines mechanischen Systems ist durch einen Punkt mit den Koordinaten (q_i, p_i) im 2f-dimensionalen Phasenraum gegeben. Die zeitliche Entwicklung des Systems wird durch eine Bahnkurve im Phasenraum beschrieben.

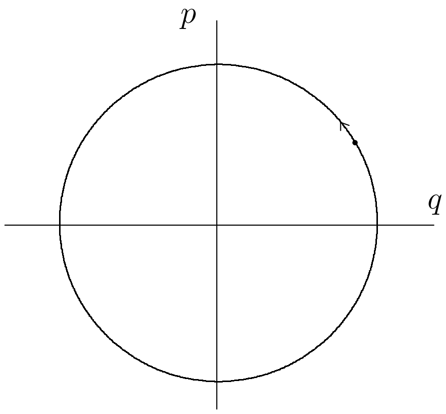

Abbildung 8.1: Die eindimensionale harmonische Schwingung eines Massenpunktes im Phasenraum

Als Beispiel sei in Abb. 8.1 die eindimensionale harmonische+ Schwingung angeführt. Die gedämpfte Schwingung würde spiralförmig um den Nullpunkt verlaufen.

Definiert man ein Volumenelement des Phasenraumes durch

$$\mathrm{d}\Gamma := \mathrm{d}q_1 \mathrm{d}q_2 \cdots \mathrm{d}q_f \mathrm{d}p_1 \cdot \mathrm{d}p_2 \cdots \mathrm{d}p_f,$$

so ergibt sich das sog. Phasenraumvolumen zu

$$V_0 = \int \mathrm{d}\Gamma.$$

Der Liouvillesche Satz besagt nun, *daß das Phasenraumvolumen zeitlich konstant bleibt.*

Der Beweis dieses Satzes ergibt sich aus der Tatsache, daß die Zeitentwicklung eine Folge kanonischer Transformationen ist (s.o.). Man kann also von den Variablensatz (q,p) zu (Q,P) übergehen.

Die Durchführung des Beweises läuft darauf hinaus, zu zeigen, daß bei der Substitution der „älteren“ Variablen durch die „neueren“ die Funktionaldeterminante $= 1$ wird.

$$\begin{aligned} V_0 &= \int \mathrm{d}Q_1\mathrm{d}Q_2\cdots\mathrm{d}Q_f\mathrm{d}P_1\mathrm{d}P_2\cdots\mathrm{d}P_f \\ &= \int D(q,p)\mathrm{d}q_1\mathrm{d}q_2\cdots\mathrm{d}q_f\mathrm{d}p_1\mathrm{d}p_2\cdots\mathrm{d}p_f \end{aligned}$$

dabei soll $D(q,p)$ die Funktionaldeterminante darstellen:

$$\begin{aligned} D &= \frac{\partial(Q_1\cdots Q_f\ P_1\cdots P_f)}{\partial(q_1\cdots q_f\ p_1\cdots p_f)} = \frac{\partial(Q_1\cdots Q_f\ P_1\cdots P_f)}{\partial(q_1\cdots q_f\ P_1\cdots P_f)} \bigg/ \frac{\partial(q_1\cdots q_f\ p_1\cdots p_f)}{\partial(q_1\cdots q_f\ P_1\cdots P_f)} \\ &= \underbrace{\frac{\partial(Q_1\cdots Q_f)}{\partial(q_1\cdots q_f)}}_{=:D_1} \bigg/ \underbrace{\frac{\partial(p_1\cdots p_f)}{\partial(P_1\cdots P_f)}}_{=:D_2} = 1 \end{aligned}$$

Daß $D_1 = D_2$ ist, ergibt sich aus dem Konstruktionsprinzip für die Funktion ϕ (s.o.). Ging man von der Erzeugendenfunktion $\phi(q,P,t)$ aus, so ergab sich $Q_i = \frac{\partial\phi}{\partial P_i}$ und $p_i = \frac{\partial\phi}{\partial q_i}$.

$$\Longrightarrow D_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2\phi}{\partial q_1 P_1} & \cdots & \frac{\partial^2\phi}{\partial q_f P_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2\phi}{\partial q_1 P_f} & \cdots & \frac{\partial^2\phi}{\partial q_f P_f} \end{vmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2\phi}{\partial q_1 P_1} & \cdots & \frac{\partial^2\phi}{\partial q_1 P_f} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2\phi}{\partial q_f P_1} & \cdots & \frac{\partial^2\phi}{\partial q_f P_f} \end{vmatrix} = D_2 \ \surd$$

Die Gleichheit der beiden Determinanten folgt aus elementaren Umformungen und dem Satz von Schwarz.

Damit ist bewiesen, daß das Phasenraumvolumen, welches ein System mehrerer Teilchen (und somit mehrerer Freiheitsgrade) einnimmt, invariant gegenüber zeitlichen Transformationen bleibt.

8.5 Hamilton-Jacobi-Gleichung.

Bisher (bei der Herleitung der Lagrange'schen- und Hamilton'schen Bewegungsgleichungen durch Minimieren der Wirkung) hing die Wirkung nicht von den jeweiligen Endpunkten a, b (den Integrationsgrenzen) ab. Die Hamilton-Jacobi-Dgl. hingegen beruht darauf, daß die Wirkung eine Funktion von den Endpunkten ist. „Die Wirkung ist das Spiegelbild der Bewegung des mechanischen Systems“.

Betrachtet man die Wirkung als Funktion des Endpunktes der Bahn (nach Auffinden des Extremums (des „besten Weges") für jeden Endpunkt

$$S = S(q(t), t),$$

so erhält man die Änderung der Wirkung bei Änderung von $q(t)$ zu

$$\delta S = \delta \int \mathcal{L} \mathrm{d}t = \int_0^t \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) \mathrm{d}t \overset{\text{p.I.}}{=} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta q \bigg|_0^t + \underbrace{\int_0^t \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) \delta q}_{=0}$$

Der letzte Teil ist $= 0$, da die Wirkung am Extremum betrachtet werden sollte (s. Abschn 4.2.1). Daraus ergibt sich nun

$$\rightsquigarrow \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}}_{=p(t)} \delta q(t) = p(t) \delta q(t) \Longrightarrow \frac{\partial \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}}{\partial \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}} = \frac{\partial S}{\partial q} = p_i. \tag{8.9}$$

Betrachtet man die Abhängigkeit von S von der Zeit, erhält man

$$\begin{aligned} \tfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \mathcal{L} &= \sum_i \left(\tfrac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i \right) + \tfrac{\partial S}{\partial t} = \sum_i p_i \dot{q}_i + \tfrac{\partial S}{\partial t} \\ \Longrightarrow \tfrac{\partial S}{\partial t} &= \mathcal{L} - \sum_i p_i \dot{q}_i = -H \end{aligned}$$

Aus dieser letzen Gleichung ergibt sich nun durch Subtraktion von $-H$ und ersetzen der Impulse durch Gl. (8.9) die Hamilton-Jacobi-Gleichung zu

$$\boxed{\frac{\partial S}{\partial t} + H \left(q_1(t), \ldots, q_f(t), \frac{\partial S}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_f}, t \right) = 0} \tag{8.10}$$

Dies ist eine partielle Differentialgleichung in $f + 1$ Variablen $(q_1, \ldots, q_f, t)$.

8.5.1 „raffiniertes" Lösungsverfahren der H-J-Dgl.

Gesucht ist ein vollständiges Integral[1] von (8.10), welches folgendes Aussehen haben muß

$$S = \phi(t, q_q, \ldots, q_f; \alpha_1, \ldots, \alpha_f) + A$$

Dabei sind die α_i und das A Integrationskonstanten. (Das A ist additiv, da S nur als Ableitung in der Dgl. vorkommt.)

[1] Ein vollständiges Integral ist eine spezielle Lösung, die einer partiellen Dgl. genügt. Sie enthält gerade so viele unabhängige Konstanten, wie unabhängige Variablen in der partiellen Dgl. vorhanden sind. Das allgemeine Integral ist bei mechanischen Problemen nicht von großer Bedeutung, kann aber aus dem vollständigen Integral konstruiert werden.

Man geht nun aus von einer kanonischen Transformation von (p, q) zu (α, β). Dabei sind die αs die Impulse (und obige Integrationskonstanten) und die βs repräsentieren die Koordinaten ($\beta_i = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i}$). Mit Hilfe der Erzeugendenfunktion $\phi(q, \alpha, t)$ ergibt sich nun (wegen (8.8))

$$p_i = \frac{\partial \phi}{\partial q_i}; \qquad \beta_i = \frac{\partial \phi}{\partial \alpha_i}; \qquad H' = H + \frac{\partial \phi}{\partial t} = H + \underbrace{\frac{\partial S}{\partial t}}_{=-H} = 0.$$

Die neuen Variablen sind zeitunabhängig, wie man leicht überprüfen kann.

$$\Longrightarrow \frac{\partial S'}{\partial t} = 0; \qquad \alpha_i = const, \qquad \beta_i = const.$$

Die Koordinaten q_i ergeben sich nun aus

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i.$$

Das ist ein Gleichungssystem mit f gekoppelten Gleichungen, welches man nun zu lösen hat.

Somit kann man also durch obiges Verfahren die partielle Dgl. auf eine normales Gleichungssystem zurückführen. (s. auch Landau-Lifschitz Band I, §47, S. 181ff)

Falls die Energie erhalten ist, also $\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Rightarrow H = E = const$ ist, ergibt sich

$$H(q_1, \dots, q_f, \frac{\partial S}{\partial q_i}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_f}) = E$$

und damit aus der Hamilton-Jacobi-Dgl.: $S_0 = S + Et$, was zeitlich konstant ist.
Beispiel: Ein Teilchen der Masse m im Potential

$$U(r, \theta) = U_0(r) + \frac{B(\theta)}{r^2},$$

dabei ist $B(\theta)$ ein Zentralpotential mit Winkelabhängigkeit. Die Lagrangefunktion dieses Systems ergibt sich zu

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2\theta \phi^2) - U.$$

Damit erhält man die Impulse

$$p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}; \qquad p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}; \qquad p_\phi = mr^2 \sin^2\theta \dot{\phi}$$

und damit wiederum die Hamiltonfunktion zu

$$H = \frac{1}{2}m(p_r^2 + \frac{p_\phi^2}{r^2} + \frac{p_\theta^2}{r^2 \sin^2\theta}) + U.$$

Die Hamilton-Jacobi-Dgl. erhält man, indem man die Impulse durch die Wirkung ausdrückt $p_i \overset{(8.9)}{=} \frac{\partial S_0}{\partial q_i}$:

$$H(q_i, \tfrac{\partial S_0}{\partial q_i}) = E$$

$$\Longrightarrow \tfrac{1}{2}m \left(\tfrac{\partial S_0}{\partial r}\right)^2 + U_0(r) + \tfrac{1}{2mr^2}\left(\left(\tfrac{\partial S_0}{\partial \theta}\right)^2 + 2mB(\theta)\right) + \tfrac{1}{2mr^2 \sin^2\theta}\left(\tfrac{\partial S_0}{\partial \phi}\right) = E$$

Die Lösung dieser Dgl. erhält man durch Separation der Variablen

$$S(r,\theta,\phi) = p_\phi \cdot \phi + S_1(r) + S_2(\theta) \qquad (p_\phi = const)$$

$$\Longrightarrow \underbrace{\left[\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S_1}{\partial r}\right)^2 + U_0(r) - E\right]}_{=:f(r)=C} + \underbrace{\left(\frac{\partial S_2}{\partial \theta}\right)^2 + 2mB(\theta) + \frac{p_\phi^2}{\sin^2\theta}}_{=:g(\theta)=-C} = 0$$

Es ergeben sich also zwei Funktionen $f(r), g(\theta)$, welche sich gegenseitig aufheben müssen. Somit wurde das Problem auf zwei gewöhnliche Dgl. 1. Ordnung reduziert, welche man immer lösen kann. Das Ergebnis lautet:

$$\begin{aligned} S(r,\theta,\phi) &= -Etp_\phi\phi + \int \sqrt{C - 2mB(\theta) - \frac{p_\phi^2}{\sin^2\theta}}\mathrm{d}\theta \\ &\quad + \int \sqrt{2m(E - U_0(r)) - \frac{C}{r^2}}\mathrm{d}r. \end{aligned}$$

So, das war's schon !?

Index