Theoretische Physik
Elektrodynamik

Sommersemester ’94

Gerrit Jahn

29. September 2003

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Dieses Skript entstand nach der Vorlesung *Theoretische Physik B — Elektrodynamik*, die Prof. Wolfgang Hollik im Sommersemester 1994 an der Uni Karlsruhe gehalten hat.

Obwohl mittlerweile die von den gröbsten Fehlern bereinigte 5. Auflage des Skriptes vorliegt, befinden sich vermutlich noch immer viele Ungereimtheiten im Skript. Es wäre nett, wenn mir diese von der Leserschaft mitgeteilt würden.

In diesem Zusammenhang möchte ich mich an dieser Stelle bei Wolfgang Fischer aus Bayreuth, Alexander Jolk, Anne Kleinert, Christian Schappacher, Helmut Spöcker, Stefan Recksiegel, Torsten Seidensticker, Stefan Willfahrt und Stefan Wolf aus Karlsruhe für das Auffinden vieler Fehler bedanken.

Das Skript wurde nicht von Prof. Hollik „autorisiert“, so daß dieser nicht für die Folgen evtl. Fehler zur Rechenschaft gezogen werden kann.

Ab sofort kann dieses Skript von folgender WWW-Seite bezogen werden:
`http://www.planetjahn.de/skripte`

Falls Probleme, Anmerkungen oder Berichtigungen bzgl. des Skripts bestehen sollten, findet sich meine Email-Adresse auf obiger Webseite.

München, Mai 2003,

Gerrit Jahn

Kapitel 1

Einführung, Überblick

1.1 Grundbegriffe

Die Elektrodynamik ist die klassische (im Gegensatz zur quantenmechanischen) Theorie des elektromagnetischen (e.m.) Feldes. Im Gegensatz zur theoretischen Mechanik wird nicht nur das Verhalten einiger Körper auf vorhandene Kräfte betrachtet, sondern vor allem die Entstehung dieser Kräfte, speziell der e.m. Kräfte.

Die elektromagnetischen Kräfte lassen sich aufteilen in

- elektrische Kräfte, die auf einen geladenen Körper wirken (Coulombkräfte).
- magnetische Kräfte, die auf bewegte geladene Körper wirken (Lorentzkräfte).

Die Ursache dieser Kräfte liegt in den elektromagnetischen Feldern mit ihrer Dynamik, die noch eingeführt werden.
Es folgen einige Größen bzw. Axiome, die man nicht herleiten kann, sondern experimentell gefunden hat.

- Existenz der elektrischen Ladung.
- Es existieren positive (+) und negative (−) Ladungen.
- Die Ladungserhaltung besagt, daß die Summe der Ladungen eines Systems (also die „Gesamtladung“) bei *allen* (!) physikalischen Prozessen konstant bleibt.

Es folgen nun einige Definitionen und Begriffe, die benötigt werden:

- Punktladung: die Ladung q wird räumlich punktförmig angenommen und die Summe $q = \sum_{i=1}^{n} q_i$ von n Punktladungen repräsentiert die Gesamtladung, Ladungen sind also additiv.

- Räumlich ausgedehnte Ladungen: bei einer kontinuierlichen Ladungsverteilung ergibt sich die Gesamtladung aus

$$q = \int_V \varrho(\vec{x}, t)\, \mathrm{d}^3x, \tag{1.1}$$

  wobei $\varrho(\vec{x}, t)$ die Ladungsdichte des Volumens V im Punkt $\vec{x}$ zur Zeit t darstellen soll.

- Stromdichte:

$$\vec{j}(\vec{x}, t) := \varrho(\vec{x}, t) \cdot \vec{v}(\vec{x}, t) \qquad \left[\frac{\text{Ladung}}{\text{Fläche} \cdot \text{Zeit}}\right], \tag{1.2}$$

  wobei $\vec{v}(\vec{x}, t)$ die Geschwindigkeit der „Ladungen“, die die Ladungsdichte enthält, am Ort $\vec{x}$ zur Zeit t ist.

- Strom durch eine Oberfläche F:

$$I := \int_F \vec{j}(\vec{x}, t) \cdot \mathrm{d}\vec{o} = \int_F \vec{j}(\vec{x}, t) \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}o, \tag{1.3}$$

  mit $\vec{n}$ dem Normaleneinheitsvektor der Fläche im Punkt $\vec{x}$ und $\mathrm{d}o$, dem Oberflächenelement.

- Strom durch eine geschlossene Fläche: bezeichnet man mit V ein Volumen und mit ∂V den Rand dieses Volumens, so ist

$$I = \int_{\partial V} \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{o} \overset{\text{Gaußscher IS}}{=} \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{j}\, \mathrm{d}^3x. \tag{1.4}$$

Mit der oben angesprochene Ladungserhaltung läßt sich nun relativ einfach eine Gleichung herleiten, die der Tatsache Rechnung trägt, daß aufgrund der Ladungen, die durch den Rand eines Volumens (nach außen) dringen, in dem Volumen eine Ladungsdichtenabnahme auftreten muß.

$$\int_{\partial V} \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{o} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_V \varrho(\vec{x}, t)\, \mathrm{d}^3x.$$

Wendet man auf die linke Seite dieser Gleichung gl. (1.4) an, zieht auf der rechten Seite die Ableitung unter das Integral und setzt voraus, daß ∂V zeitlich konstant ist, erhält man

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{j}\, \mathrm{d}^3x = -\int_V \frac{\partial \varrho}{\partial t}\, \mathrm{d}^3x \rightsquigarrow \int_V \left[\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \varrho}{\partial t}\right] \mathrm{d}^3x = 0,$$

was zur Folge hat, daß der Integrand verschwinden muß, da V beliebig ist, insbesondere also keine Nullmenge zu sein braucht.

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{x}, t) + \frac{\partial \varrho(\vec{x}, t)}{\partial t} = 0} \qquad \text{(Kontinuitätsgleichung).} \tag{1.5}$$

Diese „Kontinuitätsgleichung“ beschreibt in differentieller Form das Ladungserhaltungsgesetz.

Es folgen nun einige weitere „Erfahrungsgesetze“, also Gesetze, die man experimentell gefunden hat:

- Kraft zwischen zwei Punktladungen q_1, q_2. Die Kraft, die die Ladung q_2 auf q_1 ausübt, ist gegeben durch

$$\boxed{\vec{F}_{21} := k q_1 q_2 \frac{\vec{x}_1 - \vec{x}_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3}} \qquad \text{Coulombsches Gesetz.} \tag{1.6}$$

  Dabei ist k eine maßsystemabhängige Konstante, die im MKSA-System den Wert

$$k := \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}, \qquad \varepsilon_0 := \frac{10^7}{4\pi c^2} \frac{Vs}{Am},$$

  mit c, der Lichtgeschwindigkeit, annimmt. ε_0 bezeichnet man auch als elektrische Feldkonstante. Mit diesem Gesetz läßt sich nun das elektrische Feld definieren

- Elektrisches Feld: es befinden sich Ladungen q am Punkt $\vec{x}$ und q' bei $\vec{x}'$. Dann ergibt sich nach gl. (1.6) die Kraft auf die Ladung q zu

$$\vec{F} = q \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot q' \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} =: q\, \vec{E}(\vec{x})$$

$$\rightsquigarrow \boxed{\vec{E}(\vec{x}) := \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot q' \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} = \vec{F}/q}. \tag{1.7}$$

  $\vec{E}(\vec{x})$ bezeichnet man als Elektrische Feldstärke am Punkte $\vec{x}$, erzeugt von der Ladung q' am Punkte $\vec{x}'$. Die Ladung q in Gl. (1.7) nennt man „Probeladung“.

  Durch Superposition erhält man aus Gl. (1.7) die elektrische Feldstärke einer kontinuierlichen Ladungsverteilung

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_V \varrho(\vec{x}') \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}\, \mathrm{d}^3x'.$$

  Wenn ein solches $\vec{E}(\vec{x})$ vorgegeben ist, ergibt sich wiederum mittels Superposition die Kraft auf eine Ladungsdichte zu

$$\vec{F} = \int\limits_V \varrho(\vec{x}) \cdot \vec{E}(\vec{x})\, \mathrm{d}^3x.$$

- Kraftwirkung zwischen bewegten Ladungen (Strömen):

  Neben der oben eingeführten Kraft zwischen einzelnen Ladungen wurden Kräfte zwischen Strömen festgestellt. Wenn Stromdichten $\vec{j}(\vec{x})$ am Punkt $\vec{x}$ und $\vec{j}'(\vec{x}')$ am Punkt $\vec{x}'$ betrachtet werden, ergibt sich die Kraft auf $\vec{j}(\vec{x})\,\mathrm{d}^3x$ von $\vec{j}'$ ausgehend zu

  $$\mathrm{d}\vec{F} := \vec{j}(\vec{x})\,\mathrm{d}^3x \times \int\limits_V k' \cdot \frac{\vec{j}'(\vec{x}') \times (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}\,\mathrm{d}^3x = \vec{j}(\vec{x})\,\mathrm{d}^3x \times \vec{B}(\vec{x})$$

  $$\rightsquigarrow \boxed{\vec{B}(\vec{x}) := \int_V \frac{\vec{j}'(\vec{x}') \times (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \cdot k'\,\mathrm{d}^3x}. \tag{1.8}$$

  $\vec{B}(\vec{x})$ nennt man „magnetische Induktion“, k' ist wieder ein maßsystemabhängiger Faktor, der sich im MKSA-System zu

  $$k' := \frac{\mu_0}{4\pi} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}\frac{Vs}{Am}}{4\pi}$$

  ergibt. Dabei ist μ_0 die Induktionskonstante.

Aus obigen Überlegungen ergibt sich, daß Ladungen und Ströme die elektrische Feldstärke $\vec{E}(\vec{x})$ und die magnetische Induktion $\vec{B}(\vec{x})$ erzeugen. Nimmt man nun an, diese beiden Größen seien (wie auch immer) vorhanden, dann ergibt sich aufgrund ihrer Existenz eine Kraft auf eine Stromdichte ϱ:

$$\vec{F} = \int\limits_V \left[\varrho(\vec{x})\vec{E}(\vec{x}) + \vec{j}(\vec{x}) \times \vec{B}(\vec{x})\right]\,\mathrm{d}^3x.$$

Im weiteren Verlauf der Vorlesung werden die Größen $\vec{E}$ und $\vec{B}$ als eigene dynamische Systeme aufgefaßt und es wird das Grundproblem der Elektrodynamik, das Zusammenwirken der Größen $\vec{E}, \vec{B}, \vec{j}$ und ϱ behandelt.

Dieses Zusammenwirken wird durch einen von Maxwell komplettierten und nach ihm benannten Satz von Differentialgleichungen definiert, den Maxwell-Gleichungen.

1.2 Die Maxwell-Gleichungen

Es wird ein materiefreier Raum vorausgesetzt

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0} \qquad \text{Ladung = Quelle des } \vec{E}\text{-Feldes.} \tag{1.9}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \text{Induktionsgesetz.} \tag{1.10}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad \text{Es existieren keine magnetischen Ladungen.} \tag{1.11}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad \text{Ströme erzeugen } \vec{B}\text{-Feld.} \tag{1.12}$$

Den Term proportional zur partiellen Zeitableitung $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, den Maxwell hinzufügte, nennt man „Verschiebungsstrom".

Mit Hilfe dieser Maxwell-Gleichungen (die postuliert sind, also nicht bewiesen werden können, deren Richtigkeit aber noch nie widerlegt werden konnte) kann man nun recht einfach die Kontinuitätsgleichung (1.5) herleiten. Man multipliziert (1.12) skalar mit $\vec{\nabla}$ und setzt dann (1.9) partiell nach t differenziert in die erhaltene Gleichung ein:

$$\underbrace{\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})}_{=0} = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t},$$
$$\overset{\frac{\partial(1.9)}{\partial t}}{\rightsquigarrow} \quad 0 = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \mu_0 \frac{\partial \varrho}{\partial t} \rightsquigarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0,$$

und das ist die Kontinuitätsgleichung (1.5).

Weiterhin folgt aus den Maxwell-Gleichungen eine Beschreibung der elektrostatischen und der magnetostatischen Effekte, wenn man fordert, daß die Felder nicht explizit von der Zeit abhängen, d.h. $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$, da dadurch die elektrischen von den magnetischen Phänomenen entkoppelt sind.

Betrachtet man jedoch die volle Zeitabhängigkeit und fordert dabei Quellen- und Materiefreiheit ($\varrho = 0, \vec{j} = 0$), ergibt sich die Existenz von elektromagnetischen Wellen. Denn dann kann man $\vec{\nabla}$ vektoriell mit (1.10) mulitplizieren und erhält

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \rightsquigarrow \underbrace{\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E})}_{=\vec{\nabla}\underbrace{(\vec{\nabla} \cdot \vec{E})}_{\overset{(1.9)}{=} 0} - \Delta \vec{E}} = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \times \vec{B}) \overset{(1.12)}{=} -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$
$$\rightsquigarrow \boxed{\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0} \qquad c^2 = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}. \tag{1.13}$$

$\Delta := \vec{\nabla}^2 = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ ist der Laplaceoperator.

Diese Gleichung ist aber eine Wellengleichung, die eine $\vec{E}$-Welle beschreibt, die sich mit Lichtgeschwindigkeit c ausbreitet. Durch analoge Rechnung ergibt sich folgendes

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \mu_0 \varepsilon_0 \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \times \vec{E}) \overset{(1.10)}{=} -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$
$$\rightsquigarrow \Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0. \tag{1.14}$$

Das ist eine Wellengleichung für $\vec{B}$. Betrachtet man diese beiden Wellengleichungen zusammen, so erhält man also eine Wellengleichung, die elektromagnetische Wellen beschreibt (s. auch Abschn. 4.2).

Grenzen der klassischen Theorie ergeben sich aufgrund der atomistischen Struktur der elektrischen Ladung ($e_0 = 1,602 \cdot 10^{-19}\ As$) und der Quantenstruktur des elektromagnetischen Feldes, Elektronen, Protonen, usw., bei kleinen Abständen bzw. hohen Energien.

1.3 Mathematische Hilfsmittel

Kurve: Eine Kurve $\mathcal{C}$ von einem Punkt $\vec{x}_1$ zu einem Punkt $\vec{x}_2$ ($\vec{x}_i \in \mathbf{R}^3$) ist gegeben durch

$$\mathcal{C}:\ t \in [a,b] \to \vec{x}(t) \in \mathbf{R}^3 \text{ mit } \vec{x}(a) = \vec{x}_1, \vec{x}(b) = \vec{x}_2.$$

Ist $\mathcal{C}$ (stückweise) stetig differenzierbar, so nennt man $\mathcal{C}$ (stückweise) glatt.

Kurvenintegral: Sei $\vec{V}(\vec{x}) : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ ein Vektorfeld. Dann ist

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{V} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int_a^b \vec{V}(\vec{x}(t)) \cdot \dot{\vec{x}}(t)\,\mathrm{d}t,$$

ein Kurvenintegral, mit $\dot{\vec{x}}(t)$, dem Tangentenvektor an $\mathcal{C}$ in $\vec{x}(t)$.
Ist $\vec{V}(\vec{x})$ ein Gradientenfeld

$$\vec{V}(\vec{x}) = \vec{\nabla} f(\vec{x}) \Longleftrightarrow \vec{\nabla} \times \vec{V} = 0,$$

dann ist f die Stammfunktion von V und daher das Integral

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{V} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int_a^b \vec{\nabla} f(\vec{x}(t)) \cdot \dot{\vec{x}}(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\vec{x}(t))\,\mathrm{d}t = f(\vec{x}(b)) - f(\vec{x}(a)).$$

wegunabhängig. Über einem Skalarfeld verschwinden alle „geschlossenen“ Kurvenintegrale längs einer Kurve $\mathcal{C}_0$:

$$\oint_{\mathcal{C}_0} \vec{\nabla} f(\vec{x}) \cdot \mathrm{d}\vec{s} = 0,$$

Fläche: Eine Fläche ist gegeben durch

$$S:\ (u,v) \in D \subset \mathbf{R}^2 \to \vec{x}(u,v) \in \mathbf{R}^3.$$

Ist S (stückweise) stetig differenzierbar, nennt man S (stückweise) glatt.

Normalenvektor: Die Tangentenvektoren einer Fläche im Punkt $\vec{x}$ sind definiert als

$$\vec{x}_u := \frac{\partial \vec{x}}{\partial u}, \qquad \vec{x}_v := \frac{\partial \vec{x}}{\partial v}.$$

Aus dem Kreuzprodukt dieser beiden Vektoren ergibt sich der (unnormierte) Normalenvektor

$$\vec{n} := \vec{x}_u \times \vec{x}_v.$$

Die Orientierung dieses Vektors ist so zu wählen, daß er bei geschlossenen Flächen nach außen zeigt.

Flächeninhalt:

$$I(S) := \int_D \underbrace{|\vec{n}(u,v)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v}_{=:\,\mathrm{d}o},$$

wodurch das „Oberflächenelement“ do definiert ist. Dabei ist über den gesamten Definitionsbereich D der Parameter u und v zu integrieren.

Oberflächenintegral: Sei eine Oberfläche S und ein Vektorfeld $\vec{V}(\vec{x})$ gegeben. Dann wird das Oberflächenintegral (mit obigen Bezeichnungen) definiert durch

$$\int_S \vec{V} \cdot \mathrm{d}\vec{o} := \int_D \vec{V}(\vec{x}(u,v)) \cdot \vec{n}(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

1.3.1 Integralsätze

Satz von Gauß:

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{V}\,\mathrm{d}^3x = \int_{\partial V} \vec{V} \cdot \mathrm{d}\vec{o}. \tag{1.15}$$

Satz von Stokes:

$$\int_S \vec{\nabla} \times \vec{V} \cdot \mathrm{d}\vec{o} = \oint_{\partial S} \vec{V}\,\mathrm{d}\vec{o}. \tag{1.16}$$

1. Greenscher Satz: Seien f und g skalare Funktionen, dann ist

$$\int_V (f \cdot \Delta g + \vec{\nabla} f \cdot \vec{\nabla} g)\,\mathrm{d}^3x = \oint_{\partial V} f \cdot \vec{\nabla} g\,\mathrm{d}\vec{o}. \tag{1.17}$$

Dieses Integral kann man auch umschreiben:

$$\oint_{\partial V} f \cdot \vec{\nabla} g\,\mathrm{d}\vec{o} = \oint_{\partial V} f\,\underbrace{\vec{\nabla} g \cdot \widehat{n}}_{=\frac{\partial g}{\partial \hat{n}}}\,\mathrm{d}o. \tag{1.18}$$

Dabei ist $\widehat{n} := \vec{n}/n$ der Normaleneinheitsvektor und

$$\partial/\partial\hat{n} = \hat{n} \cdot \vec{\nabla} \tag{1.19}$$

die Normalenableitung, d.h., die Richtungsableitung in Richtung $\hat{n}$.

Der Beweis dieses Satzes ergibt sich, indem man auf die rechte Seite von (1.17) den Satz von Gauß anwendet und dann die Formel

$$\vec{\nabla} \cdot (f \vec{\nabla} g) = f \Delta g + \vec{\nabla} f \cdot \vec{\nabla} g$$

einsetzt, die sich aus der Kettenregel ergibt.

Vertauscht man nun f und g im 1. Greenschen Satz und subtrahiert die entstandenen Gleichung von (1.17), ergibt sich der 2. Greensche Satz.
2. Greenscher Satz:

$$\int_V (f \Delta g - g \Delta f) \, \mathrm{d}^3 x = \int_{\partial V} \left(f \cdot \frac{\partial g}{\partial \hat{n}} - g \cdot \frac{\partial f}{\partial \hat{n}} \right) \mathrm{d}o. \tag{1.20}$$

1.3.2 Die δ-Funktion

Die Einführung der δ-Funktion kann motiviert werden durch den Begriff der Punktladung, denn bei einer gegebenen Ladungsdichte $\varrho(\vec{x})$ kann man die Ladung eines Volumens recht einfach mittels (1.1) bestimmen. Der Begriff der Punktladung ist dagegen mit dieser Definition zum Scheitern verurteilt, denn wenn das Volumen, über das integriert wird, verschwindet, verschwindet normalerweise auch der Wert des Integrals. Aus diesem Grund wurde die δ-Funktion mit untenstehenden Eigenschaften eingeführt.
Definition:

$$\begin{aligned} &\delta(x-a) = 0 \ \forall x \neq a, a \in \mathbf{R} \text{ bel., fest,} \quad \text{aber} \\ &\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(a-x) \, \mathrm{d}x = f(a), \end{aligned} \tag{1.21}$$

falls f eine beliebig oft differenzierbare Funktion ist.

Die δ-Funktion verschwindet überall bis auf die Stelle $x = a$. Dort hat sie einen so großen Wert, daß „$0 \cdot \delta(0) = 0 \cdot \infty = 1$“ gilt. Das illustriert auch der Speziallfall von (1.21) für $f(x) = 1$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a) \, \mathrm{d}x = 1.$$

Die δ-Funktion, die eigentlich keine „Funktion“ im eigentlichen Sinne ist, läßt sich als

Grenzwert von Funktionenfolgen darstellen: z.B.

$$\begin{aligned} D_n(x-a) &= \sqrt{\frac{n}{\pi}} \cdot e^{-n(x-a)^2},\ n = 1, 2, 3, \ldots. \\ \rightsquigarrow \int\limits_{-\infty}^{\infty} D_n(x)\,\mathrm{d}x &= 1,\ \lim_{n\to\infty} D_n(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0\ \forall x \neq a \\ \infty \text{ f. } x = a \end{cases} \end{aligned}$$

Aus den beiden letzten Beziehungen ergibt sich (trivialerweise)

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} D_n(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

Diesen Grenzwert darf man wohl (symbolisch) vertauschen

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \lim_{n\to\infty} D_n(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

Eine mathematisch exakte Einführung der δ-Funktion ist in der Distributionstheorie gegeben. Man ordnet durch eine lineare Abbildung (hier speziell einer „Distribution“)

$$\delta_a :\ f \to f(a)$$

jeder Funktion f eine Funktionswert (hier an der Stelle a) zu. Dabei muß das auf dem offenen Intervall $(-\infty, \infty)$ definierte f beliebig oft differenzierbar sein. a ist ein fester Wert. Somit ergibt sich dann (irgendwie) das formale

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a) f(x)\,\mathrm{d}x = f(a).$$

<u>Ableitung der δ-Funktion:</u> Definiert man nun

$$\delta'_a :\ f \to -f'(a), \qquad \delta^{(n)}_a :\ f \to (-1)^n f^{(n)}(a),$$

so ergibt sich symbolisch

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta'(x-a) \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = -f'(a).$$

Wenn man die δ-Funktion als normale Funktion auffaßt, kann man den letzten Zusammenhang mittels partieller Integration herleiten

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\delta'(x-a)}_{:=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\delta(x-a)} f(x)\,\mathrm{d}x = \underbrace{\left[\delta(x-a) f(x)\right]_{-\infty}^{\infty}}_{=0} - \int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a) f'(x)\,\mathrm{d}x = -f'(a).$$

Aus der Substitutionsregel ergibt sich (durch Entwickeln des Arguments der δ-Funktion um die x_i und nachfolgendem Substituieren)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(g(x))\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \underbrace{\sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{g'(x_i)}}_{=\delta(g(x))}\,\mathrm{d}x,$$

wobei die x_i einfache (!) Nullstellen von g sind.

1.3.3 Die dreidimensionale δ-Funktion

Im dreidimensionalen ist die Definition der δ-Funktion analog der im Eindimensionalen.

$$\begin{aligned} \delta^3(\vec{x}-\vec{a}) &= 0\ \forall \vec{x} \neq \vec{a} \quad \text{aber} \\ \int f(\vec{x})\delta^3(\vec{x}-\vec{a})\,\mathrm{d}^3x &= f(\vec{a}). \end{aligned}$$

Diese Tatsache kann man z.B. anwenden für eine Punktladung im Pkt. $\vec{x}_0$:

$$\varrho_p(\vec{x}) = q\cdot\delta^3(\vec{x}-\vec{x}_0), \qquad \rightsquigarrow \int \varrho_p(\vec{x})\,\mathrm{d}^3x = q.$$

Weiter gilt eine wichtige, oft benutzte Gleichung:

$$\boxed{\Delta\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}_0|} = -4\pi\delta^3(\vec{x}-\vec{x}_0)}. \tag{1.22}$$

Um diese Gleichung zu beweisen, müssen zwei Dinge gezeigt werden.

Erstens muß gelten, daß $\Delta\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}_0|} = 0\ \forall\vec{x} \neq \vec{x}_0$, was man durch eine längere Rechnung bestätigen kann, indem man den Laplace-Operator in Kugelkoordinaten (s. Anhang) verwendet.

Weiterhin muß die Bedingung $\int_V \Delta\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}_0|}\,\mathrm{d}^3x = -4\pi$ für beliebige Volumina V, die kugelförmig um $\vec{x}_0$ liegen, gelten.

Dazu wählt man eine Kugel K_R mit Radius R und dem Mittelpunkt $\vec{x}_0$, der durch Verschiebung des Koordinatensystems $= 0$ gesetzt wird. Bezeichnet man weiterhin $r := |\vec{x}|$, dann folgt

$$\begin{aligned} \int_{K_R} \Delta\frac{1}{r}\,\mathrm{d}^3x &= \int_{K_R} \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}^3x \overset{(1.15)}{=} \int_{\partial K_R} \widehat{n}\cdot\vec{\nabla}\frac{1}{r}\bigg|_{r=R}\mathrm{d}o \\ &= -\int_{\partial K_R} \widehat{n}\cdot\frac{\vec{r}}{r^3}\bigg|_{r=R}\mathrm{d}o \overset{\widehat{n}=\frac{\vec{r}}{r}}{=} -\int_{\partial K_R} \widehat{n}^2\cdot\frac{1}{R^2}\,\mathrm{d}o = -\frac{1}{R^2}\cdot 4\pi R^2 \\ &= -4\pi. \end{aligned}$$

Die Bedingung $r = R$ wurde eingeführt, da durch die Umformung mit dem Satz von Gauß (die wohl nur wegen der Distributionstheorie möglich ist, da der Gaußsche Satz nur für endliche Volumina gültig ist) auf der Oberfläche integriert wurde (im Abstand $r = R$ vom Mittelpunkt).

Kapitel 2

Elektrostatik

2.1 Grundgleichungen, Potential

In der Elektrostatik werden elektrische Felder betrachtet, welche nicht explizit von der Zeit abhängen sollen, so daß von den vier Maxwell-Gleichungen lediglich zwei benötigt werden, um die elektrostatischen Phänomene zu beschreiben. Außerdem soll die Ladungsdichte $\varrho(\vec{x})$ nicht explizit von der Zeit abhängen, es soll also $\frac{\partial\varrho}{\partial t} = 0$ sein. Dann ergibt sich aus (1.9) und (1.10)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0} \tag{2.1}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \tag{2.2}$$

Aus (2.1) erhält man durch Integration über ein Volumen V das „Gaußsche Gesetz“:

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E}\, \mathrm{d}^3x \overset{(1.15)}{=} \boxed{\underbrace{\int_{\partial V} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{\sigma}}_{\text{Fluß durch } \partial V} \overset{(2.1)}{=} \frac{1}{\varepsilon_0} \underbrace{\int_V \varrho(\vec{x})\, \mathrm{d}^3x}_{\text{Gesamtladung } q(V)}}. \tag{2.3}$$

Aus Gl. (2.2) folgt, daß es ein Skalarfeld $\phi(\vec{x})$ gibt, für das gilt (wenn $\mathcal{C}$ ein Weg ist, der $\vec{x}_1$ mit $\vec{x}_2$ verbindet)

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{x}) \tag{2.4}$$

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \phi(\vec{x}_1) - \phi(\vec{x}_2).$$

$\phi(\vec{x})$ nennt man „skalares Potential“.

Ersetzt man nun in (2.1) die elektrischen Feldstärke $\vec{E}$ durch die oben gewonnene Beziehung (2.4), so ergibt sich

$$(2.1) + (2.4): \qquad \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\phi) = -\varrho/\varepsilon_0 \Longleftrightarrow \boxed{\Delta\phi = -\varrho/\varepsilon_0}. \tag{2.5}$$

Diese inhomogene partielle Dgl. nennt man „Poisson-Gleichung“. Die zugehörige homogene Gleichung ($\varrho \equiv 0$) nennt man „Laplace-Gleichung“:

$$\boxed{\Delta\phi = 0}. \tag{2.6}$$

Es folgt ein Beispiel, eine Punktladung q am Ort $\vec{x}_0$: Das Potential ist gegeben durch das Coulomb-Potential

$$\begin{aligned} \phi_p(\vec{x}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{|\vec{x}-\vec{x}_0|} \\ \rightsquigarrow \vec{E}_p &= -\vec{\nabla}\phi_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot q \cdot \frac{\vec{x}-\vec{x}_0}{|\vec{x}-\vec{x}_0|^3}. \end{aligned}$$

Da ϕ die Poisson-Gleichung (2.5) erfüllen muß, folgt

$$\Delta\phi_p(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \underbrace{\Delta\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}_0|}}_{\stackrel{(1.22)}{=} -4\pi\delta^3(\vec{x}-\vec{x}_0)} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \underbrace{q \cdot \delta^3(\vec{x}-\vec{x}_0)}_{=\varrho_p(\vec{x})}.$$

Das „Grundproblem der Elektrostatik“ besteht darin, ein Potential $\phi(\vec{x})$ zu finden, welches bei gegebenem $\varrho(\vec{x})$ bzw. gegebenen Randbedingungen die Poissonsche Gleichung (2.5) erfüllt.

Es folgt ein Spezialfall: Keine Randbedingungen, überall bekannte Ladungsdichte $\varrho(\vec{x})$:

Das Potential ergibt sich aus Superposition von Coulomb-Potentialen:

$$\boxed{\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\varrho(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\, \mathrm{d}^3x'} \quad \text{Poisson-Integral.} \tag{2.7}$$

Dieses Potential erfüllt die Poissonsche Gleichung, wie man leicht nachprüfen kann (mit Gl. (1.22)). Diese Lösung ist wohl <u>eindeutig</u> (oder zumindest physikalisch sinnvoll, wie sich noch zeigen wird bei der Einführung der potentiellen Energie), da das Potential $\phi(\vec{x}) \stackrel{|\vec{x}|\to\infty}{\longrightarrow} 0$ geht. (Das Potential muß $\sim 1/|\vec{x}|^\alpha,\ \alpha \geq 1$ sein.)

Im Allgemeinen ist jedoch das Potential nur teilweise vorgegeben und es existieren (endliche) Randbedinungen auf gegebenen Flächen.

Beispiel: Leiteroberfläche S (S ist eine Äquipotentialfläche, denn wenn das nicht so wäre, würde ein elektrisches Feld gemäß dem Gradienten des Potential(unterschied)s aufgebaut werden und die Ladungen würden sich ausgleichen), also

$$const = \phi_0 = \phi(\vec{x})|_S \equiv \phi(\vec{x}) \text{ f. } \vec{x} \in S.$$

Für das Potential ϕ kann, ausgehend vom 2. Greenschen Satz unter Verwendung der Poisson-Gleichung (2.5), eine Integralgleichung gefunden werden. Dafür setzt man in den 2. Greenschen Satz (1.20) $f = \phi(\vec{x}')$ und $g = \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$ ein und erhält (mit einem Volumen V, von $S = \partial V$ berandet und einer in V gegebenen Ladungsdichte $\varrho(\vec{x})$):

$$\begin{aligned}
&\int_V \left[\phi(\vec{x}') \cdot \Delta_{x'} \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} - \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \cdot \Delta_{x'} \phi(\vec{x}')\right] \mathrm{d}^3x' \\
&\overset{(1.20)}{=} \int_S \left[\phi(\vec{x}') \cdot \frac{\partial}{\partial \widehat{n}'} \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} - \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \cdot \frac{\partial}{\partial \widehat{n}'} \phi(\vec{x}')\right] \mathrm{d}o'.
\end{aligned}$$

Dabei ist $\partial/\partial\widehat{n}$ die Normalenableitung gemäß (1.19). Durch Einsetzen von (2.5) und (1.22) folgt nun somit aus obiger Beziehung (durch Ausführen des „linken" Integrals, gefolgt von Auflösen nach $\phi(\vec{x})$):

$$\begin{aligned}
\rightsquigarrow \phi(\vec{x}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\varrho(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \mathrm{d}^3x' \\
&\quad + \frac{1}{4\pi} \int_{S=\partial V} \left[\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \frac{\partial \phi(\vec{x}')}{\partial \widehat{n}'} - \phi(\vec{x}') \frac{\partial}{\partial \widehat{n}'} \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right] \mathrm{d}o'. \qquad (2.8)
\end{aligned}$$

Dies ist die (in den folgenden Abschnitten) wichtigste Gleichung. Mittels dieser Gleichung kann man nun, unter Kenntnis des Potentials bzw. der zugehörigen Normalenableitung auf der Oberfläche des betrachteten Volumens und/oder der Ladungsdichte im Volumen, das gesamte Potential (inner- oder außerhalb des Volumens) bestimmen.

<u>Spezialfälle</u>

1. $S \to \infty$, $V =$ gesamter Raum, $\varrho(\vec{x})$ überall gegeben, $\phi(\vec{x}') \overset{r\to\infty}{\sim} \frac{1}{r}$, $r = |\vec{x}'|$:

$$\begin{aligned}
&\rightsquigarrow \int_S \left[\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \frac{\partial \phi(\vec{x}')}{\partial \widehat{n}'} - \phi(\vec{x}') \frac{\partial}{\partial \widehat{n}'} \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right] \mathrm{d}o' \to 0, \\
&\overset{(2.8)}{\rightsquigarrow} \phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_V \frac{\varrho(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \mathrm{d}^3x'.
\end{aligned}$$

   Diese Lösung der Poisson-Gleichung ist gemäß den obigen „Überlegungen" eindeutig bzw. sinnvoll! (wegen $\phi \overset{r\to\infty}{\sim} 1/r$).

2. $\varrho \equiv 0$, nur Randwerte auf S sind vorgegeben.

$$\rightsquigarrow \phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{S=\partial V} \left[\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \frac{\partial \phi(\vec{x}')}{\partial \widehat{n}'} - \phi(\vec{x}') \frac{\partial}{\partial \widehat{n}'} \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right] \mathrm{d}o'.$$

   D.h., daß für einen Punkt $\vec{x} \in V$ das Potential festfelegt ist durch die Ladungen auf der Oberfläche des Volumens. Falls sowohl $\phi(\vec{x})|_S$ als auch $\frac{\partial\phi}{\partial\widehat{n}}|_S$ vorgegeben sind (Cauchysche Randbedingungen), ist die Integralgleichung (2.8) i.a. überbestimmt und es existiert keine Lösung!

Das Randwertproblem ist nur eindeutig lösbar, wenn entweder

- $\phi(\vec{x})|_{\vec{x}\in S}$ vorgegeben ist („Dirichlet-Problem", z.B. physikalischer Leiter), oder wenn
- $\frac{\partial\phi}{\partial\vec{n}}\big|_{\vec{x}\in S}$ vorgegeben ist („Neumann-Problem", z.B. bekannte Flächenladung σ auf S).

2.1.1 E-Feld an Grenzflächen

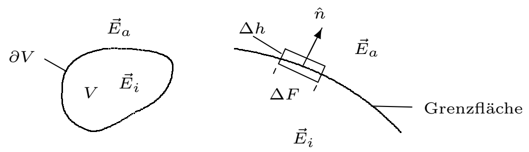

Abbildung 2.1: Zum Übergang der Normalkomponenten des E-Feldes an Grenzflächen, Definition des *Gaußschen Kästchens.*.

Sei ΔV ein kleines Volumenelement in der Grenzfläche $S = \partial V$ von einem Volumen V mit dem inneren bzw. äußeren elektrischen Feld $\vec{E}_i$ bzw. $\vec{E}_a$. ΔV ergibt sich aus $\Delta F \cdot \Delta h$ mit der Höhe Δh und einem ΔF parallel zur Grenzfläche (s. Abb. 2.1). Für $\Delta h \to 0$ ergibt sich nun

$$\int_{\partial(\Delta V)} \vec{E} \cdot \vec{\mathrm{d}o}' \overset{\text{Geometrie}}{=} \widehat{n} \cdot (\vec{E}_a - \vec{E}_i)\Delta F \overset{(1.15)}{=} \int_{\Delta V} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}\, \mathrm{d}^3x \overset{(2.1)}{=} \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\Delta V} \varrho\, \mathrm{d}^3x$$

$$\rightsquigarrow \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\Delta V} \varrho\, \mathrm{d}^3x = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \Delta F \cdot \underbrace{\int_0^{\Delta h} \varrho\, \mathrm{d}h}_{=:\sigma} = \frac{1}{\varepsilon_0}\, \Delta F\, \sigma.$$

Das so definierte σ nennt man „Flächenladungsdichte" = Ladung/Fläche. Dividiert man nun durch ΔF, erhält man

$$\boxed{\widehat{n} \cdot (\vec{E}_a - \vec{E}_i) = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma}, \text{ bzw. } E_a^n - E_i^n = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma. \tag{2.9}$$

mit E^n den Normalkomponenten des jeweiligen Feldes, welche somit nur stetig ineinander übergehen können, wenn keine Flächenladungsdichte vorliegt.

Analog verfährt man bei der Tangentialkomponente, allerdings betrachtet man hier einen Weg der Länge $2(\delta + \Delta l)$, $\delta \to 0$, der die Fläche S umschließt (s. Abb. 2.2).

$$\rightsquigarrow \oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = (E_a^t - E_i^t) \cdot \Delta l \overset{(1.16)}{=} \int_{\partial S} (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot \mathrm{d}\vec{\sigma} \overset{(2.2)}{=} 0$$

$$\rightsquigarrow \boxed{E_a^t - E_i^t = 0}. \tag{2.10}$$

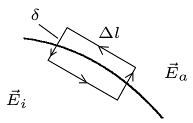

Abbildung 2.2: Zum Übergang der Tangentialkomponente des E-Feldes an Grenzflächen, Definition der *Stokesschen Fläche*.

Am Beispiel des Leiters sollen die obigen Überlegungen verdeutlicht werden. Im Inneren eines Leiters können (wegen dem Gaußschen Gesetz) keine Ladungen vorhanden sein, es gilt also $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_i = 0$, $\varrho_i \equiv 0$. Die Ladungen müssen hingegen auf der Oberfläche sitzen, also ist die Oberflächenladungsdichte von Null verschieden ($\sigma \neq 0$). Damit erhält man aus (2.9) und (2.10):

$$\begin{aligned} E_a^n - \underbrace{E_i^n}_{=0} &= \sigma/\varepsilon_0 \rightsquigarrow E_a^n = \sigma/\varepsilon_0 \\ E_a^t - \underbrace{E_i^t}_{=0} &= 0 \rightsquigarrow E_a^t = 0, \end{aligned}$$

woraus folgt, daß nur die Komponenten des E-Feldes senkrecht zur Leiteroberfläche nicht verschwinden. Daran kann man erkennen, daß die „Feldlinien" des elektrischen Feldes senkrecht auf der Leiteroberfläche stehen.

2.2 Feldenergie

Ausgehend von einer Kraft auf eine Punktladung q im Feld $\vec{E}(\vec{x})$

$$\vec{F}(\vec{x}) = q \cdot \vec{E}(\vec{x}), \qquad \vec{E}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{x})$$

ergibt sich die Arbeit , die man aufwenden muß, um q längs eines Weges von $\vec{a}$ nach $\vec{b}$ zu verschieben als

$$W(\vec{a} \to \vec{b}) := -\int\limits_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = q \cdot \int\limits_{\vec{a}}^{\vec{b}} (\vec{\nabla}\phi) \cdot \mathrm{d}\vec{s} = q \left(\phi(\vec{b}) - \phi(\vec{a})\right). \tag{2.11}$$

Wenn das Potential im Unendlichen verschwindet ($\phi \xrightarrow{|\vec{x}|\to\infty} 0$), dann nennt man den Term

$$W(\infty \to \vec{x}) = q \cdot \phi(\vec{x}) \tag{2.12}$$

die „potentielle Energie" des Teilchens q am Ort $\vec{x}$.

Die Energie einer Ladung im Feld, welches durch Punktladungen q_j am Ort $\vec{x}_j$ ($j = 1, \ldots, n$) erzeugt wird, ergibt sich zu

$$W_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{q_i \cdot q_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|}.$$

Daraus erhält man durch Summation über alle Teilchen die Gesamtenergie des Systems

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j<i}^{n} \frac{q_i \cdot q_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sum_{\substack{i,j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{q_i \cdot q_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|}. \tag{2.13}$$

Für eine kontinuierliche Ladungsverteilung gehen die Summen in Integrale über

$$\boxed{W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{2} \cdot \int \left(\int \frac{\varrho(\vec{x})\varrho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \, \mathrm{d}^3x' \right) \mathrm{d}^3x}. \tag{2.14}$$

Ein alternative Schreibweise zu dieser Formel ergibt sich, indem man den Integranden durch das E-Feld bzw. das Potential ausdrückt:

$$W = \int \frac{1}{2} \varrho(\vec{x}) \cdot \phi(\vec{x}) \, \mathrm{d}^3x \stackrel{(2.5)}{=} -\frac{\varepsilon_0}{2} \int \phi(\vec{x}) \Delta\phi(\vec{x}) \, \mathrm{d}^3x.$$

Jetzt fällt mal wieder was vom Himmel (Einsetzen von ϕ in den 2. Greenschen Satz):

$$\begin{aligned} &\int_V \phi\Delta\phi + \left(\vec{\nabla}\phi\right)^2 \mathrm{d}^3x \stackrel{(1.20)}{=} \int_{S=\partial V} \phi \cdot \vec{\nabla}\phi \, \mathrm{d}\vec{\sigma} \\ &\rightsquigarrow \int_S \phi \vec{\nabla}\phi \, \mathrm{d}\vec{\sigma} \stackrel{S\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

Somit erhält man für die Feldenergie

$$\begin{aligned} W &= \frac{\varepsilon_0}{2} \int (\vec{\nabla}\phi)^2 \, \mathrm{d}^3x = \frac{\varepsilon_0}{2} \int (\vec{E}(\vec{x}))^2 \, \mathrm{d}^3x \equiv \int w(\vec{x}) \, \mathrm{d}^3x, \\ \text{mit} &\quad w(\vec{x}) = \frac{\varepsilon_0}{2} (\vec{E}(\vec{x}))^2. \end{aligned} \tag{2.15}$$

w nennt man „Energiedichte“ des Feldes. Somit ergibt das Volumenintegral über die Energiedichte die Gesamtenergie des Feldes.

Das Problem der Formeln (2.14) und (2.15) besteht darin, daß man, sofern man Punktladungen vorgegeben hat, die sog. „Selbstenergien“ der einzelnen Ladungen mitberücksichtigt, welche im Coulomb-Potential divergieren, weil der Nenner für $\vec{x}_j = \vec{x}_i$ verschwindet. Bei der Summation (2.13) wird dieser Mißstand durch die Einschränkung $j \neq i$ umgangen.

Dies soll am Beispiel der Ladung q auf einer homogenen Kugelfläche mit dem Radius R verdeutlicht werden ($\vec{E}_i = 0$, $\vec{E}_a = q/4\pi\varepsilon_0 \cdot \vec{x}/r^3, r = |\vec{x}|$):

$$\rightsquigarrow W = \frac{\varepsilon_0}{2} \int \left(\vec{E}(\vec{x})\right)^2 \mathrm{d}^3x = \frac{\varepsilon_0}{2} \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \cdot 2 \cdot 2\pi \int\limits_R^\infty r^2 \cdot \frac{1}{r^4}\,\mathrm{d}r = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 \cdot R},$$

und dieser Ausdruck divergiert für $R \to 0$.

Da diese Selbstenergieterme eines Systems aus Massenpunkten konstant sind und nur Energiedifferenzen (keine absoluten Energien) von Interesse sind, wird der Term, der die Selbstenergie beinhaltet, „wegnormiert“. Es werden somit nur noch die Energieterme berücksichtigt, die die interessanten Wechselwirkungen beschreiben:

$$W = \underbrace{W_{\text{Selbst}}}_{:=0} + W_{\text{WW}} = W_{\text{WW}}.$$

2.3 Randwertprobleme

2.3.1 Die Greensche Funktion

Es sei eine Ladungsdichte $\varrho(\vec{x})$ und die Randbedingungen auf (irgendwelchen) Flächen vorgegeben. Gesucht ist ein Potential $\phi(\vec{x})$, welches die Poissonsche Gleichung (2.5) erfüllt.

Diese Aufgabe kann man auch (manchmal) mit der Integralgleichung (2.8) lösen. Im folgenden wird jedoch der allgemeine Weg zur Lösung dieses Problems diskutiert.

Das Potential mehrerer Ladungen ergab sich als Superposition von Coulombpotentialen gemäß (2.7)

$$\begin{aligned} \phi(\vec{x}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\varrho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}\,\mathrm{d}^3x \equiv \int G(\vec{x}, \vec{x}') \cdot \varrho(\vec{x}')\,\mathrm{d}^3x \\ \rightsquigarrow G(\vec{x}, \vec{x}') &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \end{aligned} \tag{2.16}$$

G nennt man Greensche Funktion zum Randwertproblem (2.5) (der Poisson-Gleichung). Wendet man den Laplace-Operator auf die letzte Gleichung an, ergibt sich wegen (1.22)

$$\boxed{\Delta_{x'} G(\vec{x}, \vec{x}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta^3(\vec{x} - \vec{x}')}. \tag{2.17}$$

Die Greensche Funktion ist nicht (!) eindeutig, da man zur Lösung der Gleichung eine beliebige Lösung des homogenen Problems (hier: der Laplace-Gleichung) addieren kann.

Physikalisch kann man obige Greensche Funktion als Potential einer Punktladung ($q = 1$) ansehen.

Wenn nun also wieder ein Randwertproblem (wie in Abschn. 2.1) vorgegeben ist, also im vom Rand $S = \partial V$ berandeten Volumen V entweder das Potential eingeschränkt auf die Fläche S ($\phi|_S$) oder die Normalenableitung auf dieser Fläche $\frac{\partial\phi}{\partial\hat{n}}\big|_S$ gegeben ist, so ergibt sich aus der Integralgleichung (2.8), indem man dort G einsetzt:

$$\begin{aligned}\phi(\vec{x}) \overset{(2.8)}{=} & \int_V G(\vec{x},\vec{x}')\varrho(\vec{x}')\,\mathrm{d}^3x' \\ & + \varepsilon_0 \int_S \left[G(\vec{x},\vec{x}')\frac{\partial\phi}{\partial\hat{n}'}(\vec{x}') - \phi(\vec{x}')\frac{\partial}{\partial\hat{n}'}G(\vec{x},\vec{x}')\right]\,\mathrm{d}o'. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Mit $G(\vec{x},\vec{x}')$ ist auch jede Funktion $(G+F)(\vec{x},\vec{x}')$ eine Lösung von (2.17) (also eine Greensche Funktion für das eigentliche Randwertproblem), falls $\Delta_{x'}F = 0\ \forall\vec{x},\vec{x}' \in V$ gilt.

Greensche Funktion für Dirichletsche Randbedingungen

Bei der Dirichletschen Randbedingung ist das Potential ϕ eingeschränkt auf die Fläche S vorgegeben, gesucht ist das Potential im Inneren des Volumens V. Nun wählt man eine „angepaßte“ Greensche Funktion G_D für das Dirichlet-Problem

$$\begin{aligned} & G_D(\vec{x},\vec{x}') := G(\vec{x},\vec{x}') + F_D(\vec{x},\vec{x}') \qquad \text{so, daß gilt:} \\ & \int_S G_D(\vec{x},\vec{x}')\cdot\frac{\partial\phi}{\partial\hat{n}}(\vec{x}')\,\mathrm{d}o' = 0 \end{aligned}$$

Die formale Lösung des Dirichlet-Problems würde sich dann gemäß (2.18) zu

$$\phi(\vec{x}) = \int_V G_D(\vec{x},\vec{x}')\varrho(\vec{x}')\,\mathrm{d}^3x' - \varepsilon_0\int_{\partial V}\phi(\vec{x}')\frac{\partial}{\partial\hat{n}'}G_D(\vec{x},\vec{x}')\,\mathrm{d}o'$$

ergeben. Dabei ist das G_D ausschließlich von der Geometrie des Systems abhängig. Wie man das G_D erhält, verrät z.B. die

Bestimmung von G_D durch die „Methode der Bildladungen“

Aus den vorigen Abschnitten wurden zwei Bedingungen, die G_D erfüllen muß, „erarbeitet“: Gl. (2.17) und das Verschwinden von G_D auf S (sofern $\phi|_S = 0$):

$$\Delta_{x'}G_D(\vec{x},\vec{x}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\cdot\delta^3(\vec{x}-\vec{x}')\ \forall\vec{x},\vec{x}' \in V \tag{2.19}$$

$$G_D|_S \equiv 0. \tag{2.20}$$

Wenn man z.B. G_D für eine Punktladung vor einer geerdeten Leiterfläche bestimmen will, so bedeutet die zweite Bedingung (2.19) physikalisch, daß F_D ein „Potential" darstellt, welches dem „Potential" von $G = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$ entgegenwirkt. Dabei wird das „Potential" F_D von fiktiven „Ladungen" erzeugt, welche sich außerhalb des Volumens V befinden müssen (da sie ansonsten zu G beitragen würden). Die fiktiven Ladungen, die F_D erzeugen, nennt man „Bildladungen". Sie müssen so angeordnet sein, daß (2.20) gilt.

Somit hat (in dem Fall der geerdeten Leiterfläche) G_D also die Gestalt:

$$G_D(\vec{x},\vec{x}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} + F_D(\vec{x}-\vec{x}').$$

Bei einfacher vorgegebener Geometrie des Systems kann man sich mit Symmetrieüberlegungen weiterhelfen. Dies soll am Beispiel des Halbraums $\mathbf{R}^3_+$, $(x > 0)$ verdeutlicht werden. Dabei soll sich die Ladung $q = 1$ am Ort $\vec{x}$ befinden. Das Volumen V ist in diesem Fall

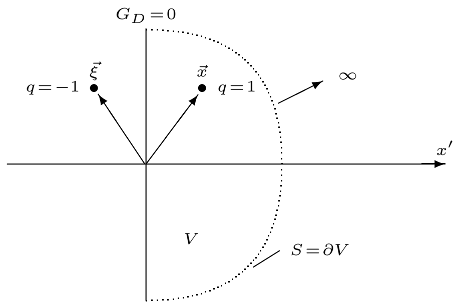

Abbildung 2.3: Die zur Bildladung $q = 1$ am Ort $\vec{x}$ zugehörige Bildladung $q = -1$ am Ort $\vec{\xi}$ erzeugt ein Potential F_D, welches das Potential von q am Ort $\vec{x}$ auf der gesamten Oberfläche S auslöscht. Dabei ist S die Berandung von V, einem Halbkreis mit Radius $R \to \infty$.

eine Halbkugel (mit unendlich großem Radius). Die Bildladung befindet sich in diesem einfachen Fall spiegelbildlich auf der „anderen" Seite von $x = 0$ am Ort $\vec{\xi}$. (s. Abb. 2.3)

Um diese Überlegungen mathematisch fassen zu können, wird der Vektor $\vec{x} = (x, y, z)$ eingeführt.

$$\begin{aligned}\vec{x} &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightsquigarrow \vec{\xi} = \begin{pmatrix} -x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \\ \rightsquigarrow G_D(\vec{x},\vec{x}') &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} - \frac{1}{|\vec{\xi}-\vec{x}'|}\right)\end{aligned}$$

Man kann leicht überprüfen, daß dieses G_D die Bedingung (2.20) erfüllt. Die Normalenableitung ergibt sich zu

$$\frac{\partial G_D}{\partial \widehat{n}} = \widehat{n} \cdot \vec{\nabla}_x G_D = -\left.\frac{\partial G_D}{\partial x'}\right|_{S:x'=0}.$$

Somit ergibt sich die Lösung des Problems der Ladung vor einer unendlich großen, leitenden Fläche zu

$$\phi(\vec{x}) = \int\limits_{x'>0} G_D(\vec{x},\vec{x}')\varrho(\vec{x}')\,\mathrm{d}^3x + \varepsilon_0 \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\phi(0,y',z')}_{\substack{\text{vorgegeben}\\ \text{d. Randwerte}}} \frac{\partial G_D}{\partial x'}(\vec{x},(0,y',z'))\,\mathrm{d}y'\,\mathrm{d}x'$$

$$\left.\frac{\partial G_D}{\partial x'}\right|_{x'=0} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{x}{[x^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{3/2}}.$$

Das Oberflächenintegral hat diese einfache Form, da der Kreisbogen des „Halbkreises“, der ja im Unendlichen liegen soll, keinen Beitrag liefert, da das Potential im Unendlichen verschwinden sollte. Es gilt also (in diesem speziellen Fall):

$$\int_S \mathrm{d}o' = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y'\,\mathrm{d}z'.$$

Greensche Funktion für Neumannsche Randbedingungen

Die Greensche Funktion der Poisson-Gleichung bei vorgegebener Normalenableitung, d.h.

$$\left.\frac{\partial\phi(\vec{x}')}{\partial\widehat{n}'}\right|_{\vec{x}'\in S} \qquad \text{gegeben,}$$

ist von der Form

$$G_N(\vec{x},\vec{x}') = G(\vec{x},\vec{x}') + F_N(\vec{x},\vec{x}')$$

und beschreibt durch G das Potential einer Punktladung ($q = 1$) und durch F_N eine Flächenladungsdichte σ.

Die einfachste Möglichkeit, die Randbedingungen zu wählen, ist

$$\left.\frac{\partial G_N}{\partial\widehat{n}'}\right|_S = const = -\frac{1}{\varepsilon_0\cdot I(S)}, \tag{2.21}$$

mit $I(S)$, dem Inhalt von S.

Die eigentlich wohl naheliegendste Möglichkeit, einfach den Oberflächenanteil in (2.18) zu vernachlässigen, scheitert dadurch, daß das Oberflächenintegral über $\partial G_N/\partial\widehat{n}$ einen von Null verschiedenen Wert $-1/\varepsilon_0$ annimmt.

Mit Gleichung (2.21) ergibt sich

$$\int_S \phi(\vec{x}')\frac{\partial G_N}{\partial\widehat{n}'}\,\mathrm{d}o' = -\frac{1}{\varepsilon_0}\cdot\underbrace{\int_S\frac{\phi(\vec{x}')}{I(S)}\,\mathrm{d}o'}_{=\langle\phi\rangle_S}.$$

Dabei ist $\langle\phi\rangle_S$ der Mittelwert des Potentials auf S. Damit ergibt sich die Lösung des Neumann-Problems mittels (2.18) zu

$$\begin{aligned}\phi(\vec{x}) &= \int_V G_N(\vec{x},\vec{x}')\varrho(\vec{x}')\,\mathrm{d}^3x' \\ &\quad +\varepsilon_0\int_S G_N(\vec{x},\vec{x}')\frac{\partial\phi}{\partial\widehat{n}'}(\vec{x}')\,\mathrm{d}o' + \langle\phi\rangle.\end{aligned}$$

Der letzte Summand definiert den Nullpunkt des Potentials.

2.4 Separation d. Variablen in der Laplace-Gleichung

Vorgegeben ist $\varrho = 0$ im Volumen V. Der Rand ∂V soll eine einfache Geometrie haben, woraus eine einfache Geometrie der Randbedingungen folgt.

Mit dem Laplace-Operator in Kugelkoordinaten wird die Laplace-Gleichung (2.6) zu

$$\rightsquigarrow \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\phi) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\phi = 0. \tag{2.22}$$

Zur Lösung dieser Gleichung wird ein Produktansatz gemacht

$$\phi(r,\theta,\varphi) = \frac{U(r)}{r}\cdot P(\theta)\cdot Q(\varphi). \tag{2.23}$$

Setzt man diesen Ansatz in (2.22) ein und multipliziert die erhaltene Gleichung mit $r^3\sin^2\theta$ und dividiert durch (UPQ), so ergeben sich zwei Summanden, die sich für alle Werte der Variablen r,θ und φ zu Null ergänzen. Der eine ist nur noch abhängig von θ und r, der andere nur von φ:

$$\underbrace{r^2\sin^2\theta\frac{1}{U}\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}r^2} + \frac{\sin\theta}{P}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\theta}\right)}_{=f(r,\theta)=:m^2} + \underbrace{\frac{1}{Q}\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}\varphi^2}}_{=f^*(\varphi)=:-m^2} = 0.$$

Die beiden linken und der rechte Summand müssen für *beliebige* Werte von φ,θ und r entgegengesetzt gleichgroß sein, entsprechend der neu eingeführten Größe m^2.

Damit hat sich eine ganz normale Dgl. zweiter Ordnung für Q abgespaltet:

$$\frac{1}{Q}\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}\varphi^2} = const = -m^2 \rightsquigarrow Q(\varphi) = e^{\pm im\varphi}. \tag{2.24}$$

Wegen der Eindeutigkeit $Q(\varphi+2\pi) = Q(\varphi)$ folgt, daß m eine ganze Zahl sein muß.

Teilt man die verbliebene Gleichung $f(r,\theta) = m^2$ durch $\sin^2\theta$, so ist sie ebenfalls entkoppelt und die beiden neuen „Funktionen“ $f^{**}(r)$ und $f^{***}(\theta)$ müssen wieder für jeden Wert der

Variablen gleichgroß sein. Man setzt sie also auf einen Wert $f^{**}, f^{***} = \pm\lambda$ und erhält so ein DGl.-System

$$\begin{aligned} r^2 \cdot \frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}r^2} - \lambda U &= 0 \\ \frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\theta}\right) + \left(\lambda - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)\cdot P &= 0. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Die erste dieser beiden Dgl. ist eine Eulersche Dgl. Sie läßt sich entweder wie in Analysis III mit der Substitution $(r := e^t, y = U(r) = U(e^t))$ oder mit dem Ansatz

$$U(r) = r^l, \quad l = const$$

lösen. Setzt man diese Lösung in die Dgl. ein, erhält man als Bedingung $l(l-1) = \lambda$. Die allgemeine Lösung der Dgl. für $U(r)$ lautet dann

$$U(r) = A \cdot r^{l+1} + B \cdot r^{-l} \tag{2.26}$$

mit zwei beliebigen Konstanten A und B.

2.4.1 Legendre-Polynome

Die zweite der beiden Differentialgleichungen (2.25) erfordert erheblich mehr mathematischen Aufwand. Man substituiert

$$x := \cos\theta, \qquad \rightsquigarrow P(\theta) \longrightarrow P(x) = P(\cos\theta)$$

und erhält nach einer „Differentiationsübung“

$$\rightsquigarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((1-x^2)\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}\right) + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right)\cdot P = 0. \tag{2.27}$$

Betrachtet man den Fall $\underline{m = 0}$, so heißt (2.27) „Legendre-Differentialgleichung“, welche an den Randpunkten der Lösung (± 1) divergent ist, wenn l keine ganze Zahl ist. Ist aber $l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, so ergeben sich als Lösungen die sog. „Legendre-Polynome“, Polynome vom Grad l, welche sich auf dem gesamten Definitionsbereich ein „normales“ Verhalten an den Tag legen.

Die explizite Darstellung dieser Polynome lautet („Formel von Rodrigues“):

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l \cdot l!}\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}(x^2-1)^l. \tag{2.28}$$

Die ersten vier Legendre Polynome lauten

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1, & P_1(x) &= x, \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1), & P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x). \end{aligned}$$

Die Legendre-Polynome besitzen folgende Eigenschaften:

- Normierung

$$P_l(1) = 1.$$

  Die P_l sind also so normiert, daß sie an der Stelle $(x = 1)$ den Wert 1 annehmen.

- Symmetrie

$$P_l(-x) = (-1)^l P_l(x)$$

  Die P_l sind punktsymmetrisch für ungerades und spiegelsymmetrisch zur y-Achse für gerades l.

- Orthogonalität

$$\int_{-1}^{1} P_l(x) \cdot P_{l'}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{2l+1}\delta_{ll'} = \begin{cases} 0 & \text{f. } l \neq l' \\ \frac{2}{2l+1} & \text{f. } l = l' \end{cases}$$

  Die P_l unterschiedlichen ls stehen „senkrecht“ aufeinander.

  Ändert man die Normierung der P_l zu

$$U_l(x) := \sqrt{\frac{2l+1}{2}} \cdot P_l(x),$$

  so folgt daraus

$$\int_{-1}^{1} U_l(x) \cdot U_{l'}(x)\,\mathrm{d}x = \delta_{ll'} \quad \text{Orthogonalitäts-Relation.} \tag{2.29}$$

  Das so entstandene Funktionensystem der U_l ist nun orthonormiert, die U_l stehen also senkrecht aufeinander und sind normiert gemäß (2.29).

- Vollständigkeit: Die Legendre Polynome P_l bilden ein „vollständiges“ Funktionensystem. (D.h., daß eine Norm existiert und jede Cauchyfolge aus diesem System einen Grenzwert im Sinne der Norm besitzt, der wiederum in dem System liegt. In AnaII heißt ein vollständiges System Banachraum.)

Betrachtet wird nun eine auf $[-1, 1]$ definiert Funktion $f(x)$, die der Bedingung

$$\int_{-1}^{1} |f(x)^2|\,\mathrm{d}x \quad \text{existiert} \tag{2.30}$$

genügt, also „quadratintegrabel“ ist.

f läßt sich dann nach orthogonalen Funktionen eines vollständigen Funktionensystem (z.B. den Legendre-Polynomen) entwickeln:

$$\rightsquigarrow f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l P_l(x) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l U_l(x). \tag{2.31}$$

Definiert man nun das Skalarprodukt als

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^{1} f(x)^* g(x) \, \mathrm{d}x,$$

wobei das f^* im komplexen Fall das konjugiert Komplexe von f darstellen soll und definiert weiter eine Norm durch

$$\|f\| := \sqrt{\langle f, f \rangle}, \tag{2.32}$$

erhält man den „Abstand" zwischen zwei Funktionen

$$\mathrm{dist}(f, g) := \|f - g\|.$$

Der Raum aller Funktionen $f(x) \in [-1, 1]$, die der Bedingungen (2.30) genügen, ausgestattet mit der Norm aus Gl. (2.32) heißt „Hilbert-Raum".

Dieser Hilbert-Raum besitzt eine ∞-dimensionale Basis, was bedeutet, daß sich alle Funktionen $f(x)$, die dem Raum angehören, als Linearkombination von Basisfunktionen darstellen lassen

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot e_n(x),$$

mit geeigneten $e_n(x)$.

Es wurde gezeigt, welche Bedingungen die f erfüllen müssen, damit sie einen vollständigen Raum (den Hilbert-Raum) bilden.

Die Basis dieses Raums muß aber ebenfalls „vollständig" sein, d.h., es dürfen keine Basisfunktionen „fehlen". Dies ist der Fall, wenn Gleichung (2.33), die sog. „Vollständigkeits-Relation" für die Basisfunktionen erfüllt ist. Für die normierten Legendre-Polynome U_l soll eben dies nun gezeigt werden:

$$\sum_{l=0}^{\infty} U_l(x) \cdot U_l(x') = \delta(x - x'). \quad \text{Vollständigkeits-Relation} \tag{2.33}$$

Diese Aussage gilt tatsächlich, denn wenn man von der Funktion

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l U_l(x) \tag{2.34}$$

ausgeht, ergibt sich durch Multiplikation dieser Gleichung mit $U_{l'}$ und nachfolgendem Integrieren über x folgender Ausdruck

$$\int\limits_{-1}^{1} U_{l'}(x) f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{l=0}^{\infty} \underbrace{\int\limits_{-1}^{1} U_{l'}(x) U_l(x)\,\mathrm{d}x}_{\overset{(2.29)}{=}\delta_{ll'}}$$

$$\rightsquigarrow \boxed{a_l = \int\limits_{-1}^{1} f(x) U_l(x)\,\mathrm{d}x}. \tag{2.35}$$

Dies ist eine Konstruktionsvorschrift zur Bestimmung der Entwicklungskoeffizienten aus Gl. (2.31).

Setzt man nun diese Koeffizienten in (2.34) ein, erhält man

$$\rightsquigarrow f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} U_l(x) \cdot \int\limits_{-1}^{1} U_l(x') f(x')\,\mathrm{d}x'.$$

Nach Vertauschung der Grenzübergänge wird daraus

$$f(x) = \int\limits_{-1}^{1} f(x') \underbrace{\sum_{l=0}^{\infty} U_l(x) U_l(x')}_{=\delta(x-x')}\,\mathrm{d}x'$$

Die δ-Funktion steht dort, da gerade $\int_{-1}^{1} f(x')\delta(x-x')\,\mathrm{d}x' = f(x)$ ergibt. Aus der letzten Gleichung ergibt sich aber nun endlich die gesuchte Beziehung (2.33). Damit ist also gezeigt, daß die U_l eine Basis des Hilbertraums, der oben definiert wurde, darstellen. Das macht uns sehr glücklich ...

Bisher wurde nur der Fall $m = 0$ in der Dgl. (2.27) betrachtet, da dann die Dgl. so „einfach" war. Nun werden die anderen Fälle betrachtet:
$\underline{m > 0}$: Die Lösung ist auf $[-1, 1]$ regulär (d.h., sie besitzt keine Singularitäten), wenn l die Wert $0, 1, 2, \ldots$ annimmt. Es ergeben sich als Lösungen wieder Polynome, welche ausgedrückt durch die Legendre-Polynome, folgende Gestalt haben:

$$P_l^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m} P_l(x). \tag{2.36}$$

Für den Fall $\underline{m < 0}$ ergeben sich die Lösungen wiederum aus den Legendre-Polynomen zu

$$P_l^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x). \tag{2.37}$$

Die Polynome (2.36) + (2.37) nennt man „assoziierte Legendre-Polynome“.

Allerdings ergeben sich aus dieser Lösung auch einige Einschränkungen für das m. Denn da die P_l Polynome vom Grade l waren, und in (2.37) die m-te Ableitung gebildet wird, darf m höchstens den Wert l annehmen, um noch physikalisch sinnvolle Ergebnisse zu erhalten:

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots, \pm l \qquad \Longleftrightarrow \qquad |m| \leq l.$$

Somit ergeben sich immerhin $2l + 1$ zugelassene Werte für m bei festem l.

2.4.2 Kugelflächenfunktionen

Nun ist es an der Zeit, wieder zum eigentlichen Problem zurückzukommen, der Lösung der Laplace-Gleichung, aus welcher sich mittels Separation der Variablen letztlich diverse Differentialgleichungen ergaben, die auf den letzten paar Seiten gelöst wurden. Also Lösung ergibt sich also letztlich ein Potential, welches proportional zu den erhaltenen Lösungen ist (s. Gln. (2.24),(2.26),(2.37)):

$$\phi \sim \underbrace{P_l^m(\cos\theta) \cdot e^{im\varphi}}_{\sim Y_{lm}(\theta,\varphi)} \cdot (Ar^l + Br^{-(l+1)}). \tag{2.38}$$

Dabei sind die $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ die sog. „Kugelflächenfunktion“, welche mit einigen Normierungsfaktoren ausgestattet, folgende Gestalt annehmen:

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) := \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \cdot \sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} \cdot P_l^m(\cos\theta) \cdot e^{im\varphi}. \tag{2.39}$$

Die Y_{lm} sind ebenfalls orthonormiert, da gilt:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin\theta Y_{lm}(\theta, \varphi) \cdot Y^*_{l'm'}(\theta, \varphi) \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi &= \int Y_{lm}(\theta, \varphi) \cdot Y^*_{l'm'}(\theta, \varphi) \, \mathrm{d}\Omega \\ &= \delta_{ll'} \delta_{mm'}, \end{aligned} \tag{2.40}$$

mit dem Raumwinkelelement $\mathrm{d}\Omega = \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi$.

Da die obige Definition (2.39) der Kugelflächenfunktion etwas bedrohlich aussieht, seien in Tab. 2.1 die wichtigsten Fälle explizit aufgeführt. Auch die Kugelflächenfunktion weist einige nützliche Eigenschaften auf, wie

- „Symmetrie“:

$$Y_{l-m} = (-1)^m Y^*_{lm}. \tag{2.41}$$

  Dabei bedeute „*“ wieder das konjugiert Komplexe.

l	m	Y_{lm}	l	m	Y_{lm}
0	0	$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$	2	2	$Y_{22} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2\theta e^{2i\varphi}$
1	0	$Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta$	3	0	$Y_{30} = \sqrt{\frac{7}{4\pi}} (\frac{5}{2}\cos^3\theta - \frac{3}{2}\cos\theta)$
1	1	$Y_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{i\varphi}$	3	1	$Y_{31} = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{21}{4\pi}} \sin\theta(5\cos^2\theta - 1)e^{i\varphi}$
2	0	$Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} (\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2})$	3	2	$Y_{32} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{105}{2\pi}} \sin^2\theta\cos\theta e^{2i\varphi}$
2	1	$Y_{21} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin\theta\cos\theta e^{i\varphi}$	3	3	$Y_{33} = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{35}{4\pi}} \sin^3\theta e^{3i\varphi}$

Tabelle 2.1: Die wichtigsten Kugelflächenfunktionen ($l, m = 0, \ldots, 3$).

- Orthogonalität und Normiertheit (s.o.).
- Die Y_{lm} bilden ein vollständiges Funktionensystem, d.h., daß sich alle Funktionen, die der zu (2.30) analogen Bedingung

$$\int |f(\theta,\varphi)|^2 \,\mathrm{d}\Omega \qquad \text{existiert}$$

genügen, nach Kugelfunktionen entwickeln lassen:

$$f(\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} a_{lm} Y_{lm}(\theta,\varphi). \tag{2.42}$$

Die Vollständigkeit der Y_{lm} ergibt sich mit folgender Beziehung

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}^*(\theta,\varphi) Y_{lm}(\theta',\varphi') = \delta(\varphi - \varphi')\delta(\cos\theta - \cos\theta').$$

Die Kugelflächenfunktionen ergeben sich auch aus der partiellen Dgl.

$$D(\theta,\varphi) Y_{lm} = -l(l+1) Y_{lm}. \tag{2.43}$$

Dabei ist D der Winkeldifferentialoperator

$$D(\theta,\varphi) = \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}. \tag{2.44}$$

Die Y_{lm} kann man als normierte Eigenfunktionen des D-Operators auffassen (zu den Eigenwerten l). Der Laplace-Operator läßt sich mit dem D-Operator wie folgt schreiben:

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \cdot) + \frac{1}{r^2} D(\theta,\varphi).$$

Zurück zum eigentlichen Problem, der Bestimmung eines Potentials ϕ durch Lösen der Laplace-Gleichung (2.6). Es ergab sich gemäß (2.38) eine Lösung mit den unabhängigen Konstanten A und B, welche aber durch Einführung der Kugelflächenfunktion jeweils von den Parametern l und m abhängen können

$$\phi(r,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left[A_{lm}\cdot r^l + B_{lm}\cdot r^{-(l+1)}\right]\cdot Y_{lm}(\theta,\varphi). \tag{2.45}$$

Betrachtet wird nun ein Randwertproblem, bei dem das Potential ϕ auf einer Kugelfläche mit Radius R gegeben ist, also

$$\phi(R,\theta,\varphi) = U(\theta,\varphi) \tag{2.46}$$

eine gegebene Funktion ist.
Es soll nun das Feld im Außenraum und im Innenraum bestimmt werden.

$r > R$ (Außenraum): $A_{lm} = 0$, da laut Konvention das Potential im Unendlichen verschwinden muß, was nur gewährleistet sein kann, wenn der Term mit r^l in Gl. (2.45) verschwindet, also die $A_{lm} = 0$ sind. Es ergibt sich somit

$$\phi = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} B_{lm} r^{-(l+1)} Y_{lm}(\theta,\varphi).$$

Die Koeffizienten B_{lm} ergeben sich aus der Randbedingung (2.46):

$$r = R: \quad \rightsquigarrow \quad U(\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} B_{lm} R^{-(l+1)} Y_{lm}(\theta,\varphi).$$

Multipliziert man diese Gleichung mit $Y^*_{l'm'}$ durch und integriert danach beide Seiten über $\mathrm{d}\Omega$, erhält man

$$\begin{aligned}\rightsquigarrow \int Y^*_{l'm'}(\theta,\varphi) U(\theta,\varphi)\,\mathrm{d}\Omega &= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} B_{lm} R^{-(l+1)} \underbrace{\int Y^*_{l'm'}(\theta,\varphi) Y_{lm}(\theta,\varphi)\,\mathrm{d}\Omega}_{\overset{(2.40)}{=}\delta_{ll'}\delta_{mm'}} \\ &= B_{l'm'}\cdot R^{-(l+1)}\end{aligned}$$

Somit ergibt sich durch Auflösen nach B_{lm}

$$\rightsquigarrow \boxed{B_{lm} = R^{l+1}\int Y^*_{l'm'}(\theta,\varphi) U(\theta,\varphi)\,\mathrm{d}\Omega}.$$

$r < R$ (Innenraum): Mit derselben Begründung wie oben bei den A_{lm} müssen in diesem Fall die B_{lm} verschwinden. Damit ist ϕ regulär (hat keinen Pol) und man erhält

$$\phi = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} A_{lm} r^l Y_{lm}(\theta, \varphi).$$

Durch eine analoge Rechnung wie bei den B_{lm} ergibt sich

$$\boxed{A_{lm} = R^{-l} \int Y^*_{l'm'}(\theta, \varphi) U(\theta, \varphi) \, \mathrm{d}\Omega}.$$

Bei azimutaler Symmetrie (Rotationssymmetrie bzgl. Drehungen um den Azimutwinkel φ), ergibt sich, wenn für $r = R$ ein Potential $U(\theta)$ vorgegeben ist:

$$\phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} [a_l r^l + b_l r^{-(l+1)}] P_l(\cos\theta). \tag{2.47}$$

Die Terme mit m fallen aus der Gleichung (2.45) heraus, da das m wegen der vorgegebenen Symmetrie verschwindet. (Das liegt daran, daß das die Separationskonstante m in der Lösung Q in (2.24) des Separationsproblems (2.23) noch auftritt. Da aber gerade diese Qs herausfallen sollen (bzw. konstant sein müssen), verschwindet das m und somit treten nur die „normalen" Legendre-Polynome statt der assoziierten auf.)

Die Koeffizienten ergeben sich wieder mittels der vorgegebenen Potentialfunktion für $r = R$ ($U(\theta)$).

Ähnliche Überlegungen führen auch bei kartesischen und Zylinderkoordinaten zum Ziel, nur müssen hier für ϕ andere Separationsansätze in (2.23) gemacht werden:

- kartesische Koordinaten: Ansatz: $\phi(x, y, z) = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z)$. Mit diesem Ansatz ergeben sich wiederum vollständige Funktionensysteme, welche aus sin-, cos-, sinh- und cosh-Termen aufgebaut sind.

- Zylinderkoordinaten: Ansatz: $\phi(r, \varphi, z) = R(r) \cdot Q(\varphi) \cdot Z(z)$. Aus diesem Ansatz erhält man wie bei Kugelkoordinaten $Q = e^{\pm im\varphi}$ und für Z eine Ausdruck wie bei den kartesischen Koordinaten. Bzgl. r erhält man Besselsche Differentialgleichungen, welche die Bessel-Funktionen als Lösung besitzen.

2.5 Multipolentwicklung

Im folgenden sei eine Ladungsdichte $\varrho(\vec{x})$ in einem begrenzten Volumen V vorgegeben.

2.5.1 Potential einer lokalisierten Ladungsverteilung

Ausgegangen wird weiterhin von der Integraldarstellung der Poissonschen Gleichung (2.7):

$$4\pi\varepsilon_0\,\phi(\vec{x}) = \int_V \frac{\varrho(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\,\mathrm{d}^3x'. \tag{2.48}$$

Prinzipiell könnte man bei vorgegebener Ladungsverteilung „einfach“ dieses Integral bestimmen und wäre fertig, aber dies ist in der Praxis manchmal nicht möglich und so soll ein anderer Weg aufgezeigt werden, wie man das Potential (letztendlich dann doch mit (2.48)) berechnen kann. Außerdem verrät dieser Weg einiges mehr über die physikalische Struktur des elektrischen Feldes.

Den Nenner in (2.48) kann man mittels Kosinussatz umschreiben in

$$\begin{aligned} |\vec{x}-\vec{x}'| &= \sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\gamma} \qquad &&\text{mit} \\ r=|\vec{x}|,\quad r'=|\vec{x}'|,\quad \vec{x}\cdot\vec{x}' &= r\cdot r'\cdot\cos\gamma, &&\gamma=\angle(\vec{x},\vec{x}'). \end{aligned}$$

Führt man nun Kugelkoordinaten ein, läßt sich der Kosinus umschreiben in

$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cdot\cos(\varphi-\varphi').$$

Im vorigen Abschnitt wurden die Legendre-Polynome eingeführt, welche ein vollständiges Funktionensystem bildeten, was u.a. bedeutet, daß man quadratintegrable Funktionen nach den Legendre-Polynomen entwickeln kann.

Dies soll nun auch mit dem Potential geschehen. Dazu wird der Abstandsterm wie folgt entwickelt

$$\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\gamma)\cdot\begin{cases}\frac{r^l}{r'^{l+1}} & \text{f. } r'>r\\ \frac{r'^l}{r^{l+1}} & \text{f. } r>r'\end{cases}$$

Dabei wird vorausgesetzt, daß eines der beiden $\vec{x}$ bzw $\vec{x}'$ klein ist gegenüber dem anderen, so daß eine Entwicklung sinnvoll ist.

Jetzt kann man ein Additionstheorem für die Kugelfunktionen anwenden:

$$P_l(\cos\gamma) = \sum_{m=-l}^{l}\frac{4\pi}{2l+1}\cdot Y_{lm}(\theta,\varphi)Y^*_{lm}(\theta',\varphi')$$

Setzt man dies alles nun in (2.48) ein und zieht dabei die Terme mit den ungestrichen Größen (welche konstant sind) vor, erhält man das Potential (hier nur f. $r > r'$) aller

$\vec{x}' \in V$ für hinreichend großen Abstand $|\vec{x} - \vec{x}'|$ zu

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{4\pi}{2l+1} Y_{lm}(\theta, \varphi) \cdot \frac{1}{r^{l+1}} \underbrace{\int\limits_V \varrho(\vec{x}') r'^l Y^*_{lm}(\theta', \varphi') \, \mathrm{d}^3x'}_{=:q_{lm}}$$

$$, \rightsquigarrow q_{lm} = \int\limits_V \varrho(\vec{x}') r'^l Y^*_{lm}(\theta', \varphi') \, \mathrm{d}^3x'. \tag{2.49}$$

Dabei nennt man die q_{lm} sphärische Multipolmomente, welche i.a. komplex sind. Da das Potential eine reelle Größe sein muß, müssen sich die imaginären Größen wieder herausheben. Das ist gewährleistet durch die Eigenschaften der Kugelflächenfunktion Y_{lm}. Wegen

$$q_{l-m} = (-1)^m q^*_{lm} \tag{2.50}$$

ergibt sich ein reelles Potential ϕ. Das Potential ϕ kann nämlich durch die q_{lm} ausgedrückt werden („Multipolentwicklung" des Potentials)

$$\phi(\vec{x}') = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{1}{2l+1} r^{-(l+1)} \cdot Y_{lm}(\theta, \varphi) \cdot q_{lm}. \tag{2.51}$$

Für $l = 0 \rightsquigarrow m = 0$ ergibt sich für q_{lm}

$$q_{00} = \int \varrho(\vec{x}') \cdot Y_{00} \, \mathrm{d}^3x' \overset{\text{Tab. 2.1}}{=} \int \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \varrho(\vec{x}') \, \mathrm{d}^3x' = q/\sqrt{4\pi}, \tag{2.52}$$

mit der Gesamtladung q. q_{00} nennt man auch „Monopolmoment", es beschreibt die Wirkung des Systems als Punktladung auf das Potential (s. „Realisierung von Multipolen" (S. 39)).

Für $l = 1$ ergeben sich die Multipolmomente 1. Ordnung (die sog. „sphärischen Dipolmomente") zu

$$\begin{aligned}
q_{10} &= \sqrt{3}4\pi \int \varrho(\vec{x}') \cdot r \cdot \cos\theta \, \mathrm{d}^3x' \overset{\text{kart. Koord.}}{=} \sqrt{3/4\pi} \int \varrho(\vec{x}') \cdot z \, \mathrm{d}^3x' \\
q_{11} &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \int \varrho(\vec{x}') r \sin\theta e^{-i\varphi} \, \mathrm{d}^3x' \\
&\overset{\text{kart. Koord.}}{=} -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \int \varrho(\vec{x}') \cdot (x' - iy') \, \mathrm{d}^3x' \\
q_{1-1} &\overset{(2.50)}{=} -q^*_{11} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \int \varrho(\vec{x}') \cdot (x' + iy') \, \mathrm{d}^3x'.
\end{aligned} \tag{2.53}$$

Für $l = 2$ ergeben sich die Quadrupolmomente, für allgemeines l 2^l-Pole.

Dipole entstehen (s.u.) durch geeignete Konfiguration von 2, Quadrupole durch 4, allgemein durch 2^l-Punktladungen.

Jetzt wird noch einmal näher auf das Verhalten von Dipolen bwz. das Dipolmoment eingegangen. Man definiert das (kartesische) Dipolmoment als

$$\vec{p} := \int \varrho(\vec{x}) \cdot \vec{x} \, \mathrm{d}^3 x \tag{2.54}$$

und erhält somit einen Zusammenhang zwischen den kartesischen und den sphärischen Dipolmomenten 1. Ordnung

$$q_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} p_z; \quad q_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} (p_x - ip_y); \quad q_{1-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} (p_x + ip_y). \tag{2.55}$$

Dreht man nun das Koordinatensystem so, daß der Vektor $\vec{p}$ in z-Richtung zeigt, also $\vec{p} = (0, 0, p)$ ist, so ergibt sich aus der Multipolentwicklung des Potentials (2.51)

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \Bigg[\underbrace{\frac{q}{r}}_{\text{Coulombpotential}} + \underbrace{\frac{p \cdot \cos\theta}{r^2}}_{\text{Dipolpotential} =: \phi_D} + O\left(\frac{1}{r^3}\right) \Bigg]. \tag{2.56}$$

Aus dem Dipolpotential ϕ_D ergibt sich durch Gradientenbildung das elektrische Feld eines Dipols

$$\rightsquigarrow \vec{E}_D = -\vec{\nabla} \phi_D.$$

Der $\vec{\nabla}$-Operator hat in Kugelkordinaten folgende Gestalt (s. Anhang):

$$\nabla_r = \frac{\partial}{\partial r}; \quad \nabla_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}; \quad \nabla_\varphi = \frac{1}{r \cdot \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi},$$

so daß sich das Dipol-E-Feld wie folgt ergibt

$$\left.\begin{aligned} E_r &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2p\cos\theta}{r^3} \\ E_\theta &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{p\sin\theta}{r^3} \end{aligned}\right\} \sim \frac{1}{r^3}$$

$$E_\varphi = 0$$

Die r^{-3}-Abhängigkeit ist charakteristisch für das Dipolfeld, welches bei völlig allgemeiner Lage wohl folgende Form annimmt:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{3(\vec{x} \cdot \vec{p}) \cdot \vec{x} - \vec{x}^2 \cdot \vec{p}}{|\vec{x}|^5}} \tag{2.57}$$

Geht man nun wieder von Gl. (2.48) aus und entwickelt den Abstandsterm $1/|\vec{x}-\vec{x}'|$ um $\vec{x}_0'$ für festes $\vec{x}$, diesmal aber in kartesischen Koordinaten, so erhält man

$$\begin{aligned}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} &= \frac{1}{|\vec{x}|} + \underbrace{\vec{x}' \cdot \left[\vec{\nabla}_{x'} \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right]_{\vec{x}'=0}}_{=\frac{\vec{x}'\cdot\vec{x}}{|\vec{x}|^3}} \\ &\quad + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3} x_j' x_i' \left[\frac{\partial^2}{\partial x_i' \partial x_j'} \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right]_{\vec{x}'=0}}_{\overset{\text{umordnen}}{=} \sum_{i,j=1}^{3} \left(x_i x_j (3x_i' x_j') - \vec{x}'^2 \cdot \delta_{ij}\right)/|\vec{x}|^5} + \cdots .\end{aligned}$$

Setzt man diesen Ausdruck nun ein, ergibt sich das von der Ladungsdichte ϱ erzeugt Potential zu

$$\begin{aligned}\phi(\vec{x}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{|\vec{x}|} \cdot \int \varrho(\vec{x}')\,\mathrm{d}^3x' + \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3} \int \vec{x}'\,\varrho(\vec{x}')\,\mathrm{d}^3x' \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}\frac{1}{|\vec{x}|^5} \sum_{i,j=1}^{3} x_i x_j \underbrace{\int (3x_i' x_j' - \vec{x}'^2 \delta_{ij})\,\mathrm{d}^3x' \cdot \varrho(\vec{x}')}_{=:Q_{ij}\ \text{Quadrupol-Tensor}} \right\} + \cdots \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{q}{|\vec{x}|} + \frac{\vec{x}\cdot\vec{p}}{|\vec{x}|^3} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3} Q_{ij} \cdot \frac{x_i x_j}{|\vec{x}|^5} + \cdots\right\}. \qquad (2.58)\end{aligned}$$

Dabei ist Q_{ij} der Quadrupoltensor, ein Tensor 2. Stufe, der symmetrisch und außerdem spurfrei ($\sum_i Q_{ii} = 0$) ist und somit 5 voneinander unabhängige Komponenten aufweist.

Die sphärischen Komponententen der Multipolemomente 2. Ordnung q_{ij} (s.o.) ergeben sich als Linearkombinationen der Komponenten des Quadrupoltensors!

<u>Realisierung von Multipolen</u>

- Monopole werden durch Punktladungen in $\vec{x} = 0$ realisiert.
- Dipole realsiert man durch zwei Punktladungen mit gegensätzlichem Vorzeichen im Abstand d. Wenn ein reiner Dipol vorliegen soll, muß die Gesamtladung verschwinden ($q = 0$) und ein Dipolmoment vorhanden sein ($\vec{p} \neq 0$).
- Einen Quadrupol erhält man, indem man zwei Dipole gegeneinander „verdreht“. Soll ein reiner Quadrupol vorliegen, so muß sowohl die Gesamtladung wie auch das Dipolmoment verschwinden, es muß nur mindestens eine Komponente des Quadrupoltensors von Null verschieden sein.

Bei den Überlegungen auf den letzten Seiten ist in einer Beziehung Vorsicht geboten, denn die Überlegungen treffen ausschließlich auf das sog. „Fernfeld" (also für einen „Betrachtungsabstand", der sehr viel größer als der Abstand der jeweiligen Punktladungen untereinander sein muß) zu. Sie geben in keiner Weise Aufschlüsse über das sog „Nahfeld", welches von der Ladungsdichte erzeugt wird!

2.5.2 Ladungsverteilung im äußeren Feld

$\varrho(\vec{x})$ sei eine um $\vec{x} = 0$ lokalisierte Ladungsverteilung. Weiterhin sei $\phi(\vec{x})$ ein langsam veränderliches äußeres Feld, das <u>nicht</u> von der gegebenen Ladungsdichte erzeugt wird.

Man kann nun die Energie, die sich aus den Wechselwirkungen dieses Potentials mit der vorhandenen Ladungsdichte ergibt, berechnen:

$$W = \int \varrho(\vec{x}')\phi(\vec{x}')\,\mathrm{d}^3x', \tag{2.59}$$

wobei hier im Gegensatz zu Gl. (2.15) *kein* Faktor $\frac{1}{2}$ steht, da das betrachtete Feld ein äußeres Feld ist, so daß in diesem Fall keine doppelt gezählten Terme auftreten.

Das Potential kann wiederum um $\vec{x} = 0$ entwickelt werden:

$$\begin{aligned}
\phi(\vec{x}) &= \phi(0) + \vec{x}\cdot\vec{\nabla}\phi(0) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3} x_i x_j \frac{\partial^2\phi}{\partial x_i \partial x_j}(0) + \cdots \\
&\overset{\vec{E}=-\vec{\nabla}\phi}{=} \phi(0) - \vec{x}\cdot\vec{E}(0) - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3} x_i x_j \frac{\partial E_j}{\partial x_i}(0) + \cdots \\
&= \phi(0) - \vec{x}\cdot\vec{E}(0) - \frac{1}{6}\sum_{i,j=1}^{3}(3x_i x_j - \vec{x}^2\cdot\delta_{ij})\cdot\frac{\partial E_j}{\partial x_i}(0).
\end{aligned}$$

Die letzte Umformung (das Hinzufügen des δ-Terms) ist erlaubt, da die Divergenz des E-Feldes im vorliegenden Fall verschwindet

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} \overset{\text{hier}}{=} 0,$$

da die vorliegenden Ladungen definitionsgemäß <u>nicht</u> die Quellen des Feldes sind!
Somit ergibt sich die Energie aus (2.59) zu

$$\begin{aligned}
W &= \phi(0)\cdot\int\varrho(\vec{x})\,\mathrm{d}^3x - \vec{E}(0)\cdot\int\vec{x}\cdot\varrho(\vec{x})\,\mathrm{d}^3x - \frac{1}{6}\sum_{i,j=1}^{3} Q_{ij}\cdot\frac{\partial E_j}{\partial x_i}(0) + \cdots \\
&= \underbrace{q\cdot\phi(0)}_{\text{Coulomb-WW}} - \underbrace{\vec{p}\cdot\vec{E}(0)}_{\text{Dipol-WW}} - \frac{1}{6}\sum_{i,j=1}^{3} Q_{ij}\cdot\frac{\partial E_j}{\partial x_i}(0) + \cdots
\end{aligned} \tag{2.60}$$

Anhand dieses letzten Ausdruck kann man recht gut die Aufteilung der Energie erkennen, man sieht, daß die Energie von Monopolen, also Punktladungen proportional zum Potenial ist ($W_{\text{Mon}} \sim \phi$). Die Energie eines Dipols ist proportional zum E-Feld ($W_D \sim E$) und die Energie eines Quadrupols ist proportional zum „Gradienten“ des E-Feldes ($W_{\text{Quadr.}} \sim \vec{\nabla}\vec{E}$).

Die Kraft, die auf die Ladunsgdichte wirkt, ergibt sich aus

$$\vec{F} = \int \varrho(\vec{x})\vec{E}(\vec{x})\,\mathrm{d}^3x, \qquad \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi.$$

Dazu entwickelt man das E-Feld um $\vec{x} = 0$ und erhält

$$E_i(\vec{x}) = E_i(0) + \vec{x} \cdot \vec{\nabla} E_i(0) + \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{3} x_j x_k \frac{\partial^2 E_i}{\partial x_j \partial x_k}.$$

Setzt man dies in die Gleichung für die Kraft ein, folgt

$$\begin{aligned} F_i &= q \cdot E_i(0) + \vec{p} \cdot \vec{\nabla} E_i(0) \\ &\quad + \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{3} \underbrace{\int \varrho(\vec{x}) \cdot \left(x_j\, x_k - \frac{1}{3}\vec{x}^2\ \delta_{jk} \right)}_{=Q_{jk}/3} \cdot \frac{\partial^2 E_i}{\partial x_j \partial x_k}(0) + \cdots . \end{aligned}$$

Der Term mit dem δ darf eingeführt werden, da

$$\begin{gathered} \Delta E_i = 0, \quad \text{da } \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad \text{und} \\ \vec{\nabla} \times \underbrace{(\vec{\nabla} \times \vec{E})}_{=0} = \Delta\vec{E} + \vec{\nabla} \cdot (\underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{E}}_{=0}). \end{gathered}$$

Die Rotation von $\vec{E}$ verschwindet, da $\vec{E}$ ein Gradientenfeld ist, während die Divergenz wie bereits geschildert verschwindet, weil die Quellen des Feldes <u>nicht</u> den vorgegeben Ladungen entsprechen. Die verwendete Formel findet sich im Anhang.

Somit ergibt sich also letztlich die Kraft auf die Ladungsdichte durch ein äußeres Feld zu

$$F_i = q \cdot E_i + (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) E_i(0) + \frac{1}{6}\sum_{j,k=1}^{3} Q_{jk} \frac{\partial^2 E_i}{\partial x_j \partial x_k}(0) + \cdots, \quad i = 1, 2, 3. \tag{2.61}$$

2.6 Elektrostatik in Materie

Die „Materie“ läßt sich (u.a.) aufteilen in

- Leiter: Ladungen sind innerhalb von Leitern frei beweglich. In der Elektrostatik befinden sich die Ladungen auf der Oberfläche des Leiters. Das elektrische Feld im Inneren des Leiters verschwindet, wohingegen das E-Feld außen parallel zur Flächennormale des Leiters (also senkrecht auf dem Leiter) steht.

- Nichtleiter (Dielektrika): Ladungen sind nicht frei beweglich, aber Ladungsverteilungen sind deformierbar.

Es stellen sich nun zwei Probleme, erstens die Kenntnis der Struktur der mikroskopischen Ladungsverteilung, um die atomistischen Wechselwirkungen deuten zu können und zweitens die Berechnung der makroskopischen Feldgrößen aus den Ladungsverteilungen.

Zur mikroskopischen Struktur werden folgende Größen festgelegt. Eine Ladungsdichte $\varrho_i(\vec{x})$ des mikroskopischen Elements (Moleküls o.ä.) i am Ort $\vec{x}_i$, aus der sich ein Potential $\phi_i(\vec{x})$ bzw. ein elektrisches Feld $\vec{E}_i(\vec{x})$ ergibt.

Allgemein wird z.B. mit A eine mikroskopische Größe bezeichnet, die sich aus der Summation über alle mikroskopischen Elemente i ergibt: $A(\vec{x}) = \sum_i A_i(\vec{x})$.

Die makroskopischen Größen ergeben sich schließlich aus der Mittelung über diese mikroskopischen Größen.

2.6.1 Die makroskopischen Gleichungen

Da man die mikroskopischen Größen schlecht „messen kann", werden Größen definiert, die eine Mittelung der mikroskopischen Größen über kleine Volumina ΔV am Ort $\vec{x}$ darstellen (dabei soll der Durchmesser von ΔV sehr viel größer als die Molekülabmessungen sein, so daß ΔV makroskopisch klein, jedoch mikroskopisch groß ist): Dazu führt man einen Vektor $\vec{\xi}$ ein, der alle Punkte des Volumens ΔV durchläuft

$$\big\langle A(\vec{x})\big\rangle = \frac{1}{v}\int_{\Delta V} A(\vec{x}+\vec{\xi})\,\mathrm{d}^3\xi. \tag{2.62}$$

Dabei soll $v = I(\Delta V)$ der Inhalt von ΔV sein.

An diesem Punkt muß man annehmen, daß die Maxwellschen Gleichungen auch für mikroskopische Ladungsverteilungen noch gültig sind, woraus sich dann die Lösung des oben beschriebenen zweiten Problems, der Berechnung der (mikroskopischen) Feldgrößen von selbst ergibt.

Weiterhin muß an dieser Stelle eine Approximation durchgeführt werden, um die mikroskopischen Größen makroskopisch fassen zu können: Man entwickelt die Potentiale der ΔV nach Multipolen (s. Absch 2.5) bis zum Dipolterm (da höhere Multipole schnell abfallen und man davon ausgehen kann, daß man sich in genügend größer Entfernung befindet, so daß Multipolterme höherer Ordnung keinen Beitrag mehr liefern). Der Monopolterm darf hingegen nicht vernachlässigt werden, da es vorkommen kann, daß die Gesamtladung nicht verschwindet, was ja gerade durch diesen Term abgedeckt wird.

Somit ist die Ladungsdichte ϱ_i eines kleinen Volumens ΔV am Ort $\vec{x}_i$ gegeben durch die Gesamtladung q_i und das Dipolmoment $\vec{p}_i$ am Ort $\vec{x}_i$. Damit erhält man für das zugehörige

Potential

$$4\pi\varepsilon_0\phi = \frac{q_i}{|\vec{x}-\vec{x}_i|} + \frac{\vec{p}_i\cdot(\vec{x}-\vec{x}_i)}{|\vec{x}-\vec{x}_i|^3} + \cdots$$

Durch Summation über alle ΔV's ergibt sich das Gesamtpotential eines Volumens V (mit $V \gg \Delta V$) zu

$$\rightsquigarrow \phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{\vec{x}_i\in V}\left[\frac{q_i}{|\vec{x}-\vec{x}_i|} + \frac{\vec{p}_i\cdot(\vec{x}-\vec{x}_i)}{|\vec{x}-\vec{x}_i|^3}\right]. \tag{2.63}$$

Definiert man nun folgende Größen:

$$\begin{aligned}\varrho(\vec{x}) &:= \sum_i q_i\delta^3(\vec{x}-\vec{x}_i) \quad \text{mikroskopische Ladungsdichte}\\ \vec{\Pi}(\vec{x}) &:= \vec{p}_i\delta^3(\vec{x}-\vec{x}_i) \quad \text{mikroskopische Dipoldichte,}\end{aligned}$$

so geht Gl. (2.63) über in

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \mathrm{d}^3x'\left\{\frac{\varrho(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} + \frac{\vec{\Pi}(\vec{x}')\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}\right\}. \tag{2.64}$$

Dies ist das gesamte mikroskopische Potential, welches aber noch nicht gemittelt ist, welches also noch mit keinerlei makroskopischer Bedeutung behaftet ist.

Die Mittelung wird durchgeführt, indem man das Potentiel ϕ in Gl. (2.62) statt A einsetzt:

$$\begin{aligned}\rightsquigarrow 4\pi\varepsilon_0\big\langle\phi(\vec{x})\big\rangle &\overset{(2.62)}{=} 4\pi\varepsilon_0\frac{1}{v}\int\limits_{\Delta V}\phi(\vec{x}+\vec{\xi})\,\mathrm{d}^3\xi\\ &= \frac{1}{v}\int\limits_{\Delta V}\int\limits_{V}\frac{\varrho(\vec{x}')}{|\vec{x}+\vec{\xi}-\vec{x}'|} + \frac{\vec{\Pi}(\vec{x}')(\vec{x}+\vec{\xi}-\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{\xi}-\vec{x}'|^3}\,\mathrm{d}^3x'\,\mathrm{d}^3\xi\\ &\overset{\text{Subst.}}{=} \frac{1}{v}\int\limits_{\Delta V}\int\limits_{V}\frac{\varrho(\vec{y}+\vec{\xi})}{|\vec{x}-\vec{y}|} + \frac{\vec{\Pi}(\vec{y}+\vec{\xi})\cdot(\vec{x}-\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|^3}\,\mathrm{d}^3y\,\mathrm{d}^3\xi\\ &= \frac{1}{v}\int_V\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|}\underbrace{\int_{\Delta V}\varrho(\vec{y}+\vec{x})\,\mathrm{d}^3\xi}_{\overset{(2.62)}{=}v\langle\varrho(\vec{y})\rangle}\,\mathrm{d}^3y\\ &\quad+\frac{1}{v}\int_V\frac{\vec{x}-\vec{y}}{|\vec{x}-\vec{y}|^3}\underbrace{\int_{\Delta V}\vec{\Pi}(\vec{y}+\vec{\xi})\,\mathrm{d}^3\xi}_{\overset{(2.62)}{=}v\langle\vec{\Pi}(\vec{y})\rangle}.\end{aligned} \tag{2.65}$$

Bezeichnet man nun mit

$$\bar{\varrho}(\vec{y}) := \big\langle\varrho(\vec{y})\big\rangle$$

die makroskopische (gemittelte) Ladungsdichte, also die Ladungsdichte der Überschußladungen (das sind die Ladungen, die nach der Mittelung über ein best. Volumen noch vorhanden sind) und mit

$$\vec{P}(\vec{y}) := \langle \vec{\Pi}(\vec{y}) \rangle$$

die makroskopische Dipoldichte oder die „Polarisation“, welche das mittlere Dipolmoment pro Volumen darstellt, so erhält man aus Gl. (2.65)

$$\langle \phi(\vec{x}) \rangle = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \Big(\frac{\bar{\varrho}(\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|} + \frac{\vec{P}(\vec{y}) \cdot (\vec{x}-\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|^3} \Big) \, \mathrm{d}^3 y. \tag{2.66}$$

Aus diesem Potential ergibt sich nun durch Gradientenbildung das makroskopische elektrische Feld, da

$$\vec{E} = \langle \vec{E}_{\text{mikroskopisch}} \rangle = \langle -\vec{\nabla}\phi \rangle = -\vec{\nabla}\langle \phi \rangle.$$

Da $\vec{E}$ ein Gradientenfeld ist, folgt

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0, \tag{2.67}$$

somit ergibt sich also zwanglos die Gültigkeit der Maxwell-Gleichung (2.2). Um ein Analogon zu (2.1) zu erhalten, bedarf es etwas mehr Rechnerei. Man bildet die Divergenz von $\vec{E}$ und erhält

$$\begin{aligned}
\rightsquigarrow 4\pi\varepsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= -4\pi\varepsilon_0 \Delta_x \langle \phi(\vec{x}) \rangle \\
&= -\int_V \bar{\varrho}(\vec{y}) \underbrace{\Delta_x \frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|}}_{\overset{(1.22)}{=} -4\pi\delta^3(\vec{x}-\vec{y})} + \vec{P}(\vec{y}) \underbrace{\Delta_x \left(\vec{\nabla}_y \frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|} \right)}_{\overset{(1.22)}{=} -4\pi \vec{\nabla}_y \delta^3(\vec{x}-\vec{y})} \mathrm{d}^3 y \\
&= 4\pi \bar{\varrho}(\vec{x}) + 4\pi \int_V \vec{P}(\vec{y}) \cdot \vec{\nabla}_y \, \delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \, \mathrm{d}^3 y.
\end{aligned} \tag{2.68}$$

Um diese letzte Beziehung auswerten zu können, bedarf es einer kurzen „Zwischenüberlegung“. Dazu benötigt man erst einmal folgende Formel (die sich symbolisch aus der Produktregel ergibt) aus der Vektorrechnung (s. A.2):

$$\vec{a} \cdot \vec{\nabla} f = -f(\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) + \vec{\nabla} \cdot (\vec{a} \cdot f). \tag{2.69}$$

Wendet man diese Formel in (2.68) an, so erhält man eine „totale“ Divergenz im letzten

Term, den man dann mittels dem Satz von Gauß (1.15) umschreiben kann:

$$
\begin{aligned}
\rightsquigarrow (2.68) \overset{(2.69)}{=}\; & 4\pi\varrho(\vec{x}) - 4\pi \underbrace{\int_V \delta^3(\vec{x}-\vec{y})\,\vec{\nabla}_y \cdot \vec{P}(\vec{y})\,\mathrm{d}^3y}_{=\vec{\nabla}\cdot\vec{P}(\vec{x})} \\
& +4\pi \int_V \vec{\nabla}_y \cdot \big(\vec{P}(\vec{y})\delta^3(\vec{x}-\vec{y})\big)\,\mathrm{d}^3y \\
\overset{(1.15)}{=}\; & -4\pi\big(\vec{\nabla}\cdot\vec{P}(\vec{x}) - \varrho(\vec{x})\big) \qquad (2.70) \\
& +4\pi \underbrace{\int_{\partial V} \vec{P}(\vec{y}) \cdot \delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \cdot \,\mathrm{d}\vec{o}_y}_{=0} \qquad (2.71)
\end{aligned}
$$

Der letzte Term verschwindet, da die Delta-Funktion nur einen Beitrag liefert für $\vec{x} = \vec{y}$, was aber nicht auftreten kann, da $\vec{y}$ auf dem Rand, also im Unendlichen liegt, was für das „physikalische“ $\vec{x}$ natürlich nicht gelten darf. Mittels der Rückführung von Volumen- auf Oberflächenintegrale entledigt man sich in der Physik desöfteren unleidiger Integrale!

Als Ergebnis dieser ganzen Rechnerei ergibt sich letztlich

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_0 \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{x}) &= \varrho(\vec{x}) - \vec{\nabla}\cdot\vec{P}(\vec{x}) \\
\rightsquigarrow \vec{\nabla}(\varepsilon_0 \cdot \vec{E} + \vec{P}) &= \varrho. \qquad (2.72)
\end{aligned}
$$

Diese Gleichung (2.72) ist das Analogon zur Maxwell-Gleichung (2.1), welches sich noch etwas schöner schreiben läßt durch Einführung der „Dielektrischen Verschiebung“ $\vec{D}$:

$$
\vec{D} := \varepsilon_0 \cdot \vec{E} + \vec{P} \rightsquigarrow \boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \varrho}. \qquad (2.73)
$$

Anhand dieser Gleichung kann man sehr gut sehen, daß das Feld $\vec{D}$ von den Überschußladungen erzeugt wird, (somit verschwindet bei neutralen Medien auch die Divergenz von $\vec{D}$), während das E-Feld durch die Überschußladungen und dem makroskopischen Dipolmoment erzeugt wird. Das E-Feld ist eine physikalische Meßgröße, während das D-Feld eine formale (mathematische) Hilfsgröße ist.

Quellen von $\vec{P}$

Eine nichtverschwindende Polarisation ergibt sich immer dann, wenn einer der folgenden Fälle auftritt

- Existenz „induzierter Dipole“ . Ein induzierter Dipol ist z.B. ein Edelgasatom, welches nur dann ein Dipolmoment $\vec{p}_i$ aufweist, wenn eine äußeres elektrisches Feld angelegt wird, wodurch sich die Ladungszentren verschieben und sich die Dipolmomente somit nicht mehr herausmitteln (wie das der Fall ist, wenn keine E-Feld vorhanden ist). In diesem Fall ist also die Polarisation abhängig vom E-Feld: $\vec{P} = \vec{P}(\vec{E})$.

- Existenz „permanenter Dipole“. Ein permanenter Dipol ist z.B. ein Wassermolekül, da es kein lineares Molekül ist. Im zeitlichen Mittel heben sich aufgrund der Wärmebewegung aber doch die einzelnen Dipolmomente wieder gegeneinander auf, so daß ebenfalls erst bei angelegtem E-Feld eine Polarisation vorhanden ist. (D.h., es gilt wiederum $\vec{P} = \vec{P}(\vec{E})$).

- Medium ist ein Ferroelektrikum und zeichnet sich somit durch eine spontante Ausrichtung (auch bei $\vec{E} = 0$) der „eingebauten“ Dipole aus. Dieser Fall soll hier jedoch nicht weiter diskutiert werden.

Somit erfolgt eine Beschränkung auf die ersten beiden Fälle. In beiden Fällen war die Polarisation direkt abhängig vom E-Feld, was man dahingehend ausnutzen kann, daß man die Polarisation in E entwickelt:

$$P_i(\vec{E}) = \sum_{j=1}^{3} \chi_{ij} E_j + \sum_{j,k=1}^{3} \beta_{ijk} E_j E_k + \cdots$$

Dabei sind χ_{ij} und β_{ijk} Materialgrößen, welche experimentell für das jeweilige Medium bestimmt werden müssen.

Die Erfahrung hat gelehrt, daß eine Entwicklung bis zum linearen Term ausreichend ist, um das Verhalten des Dielektrikums in nicht zu großen E-Feldern zu beschreiben. Solche Materialien auf die das zutrifft, nennt man „lineare Dielektrika“.

Die in diesem Fall weiterhin auftretende dimensionslose Größe χ_{ij} nennt man „Suszeptibilitäts-Tensor“.

Damit ergibt sich, daß im allgemeinen Fall die Polarisation nicht parallel zum elektrischen Feld ist.

Falls das betrachtete Dielektrikum nicht nur linear, sondern auch noch isotrop ist, so besitzt der Tensor χ_{ij} nur noch einen Freiheitsgrad:

$$\chi_{ij} = \delta_{ij}\chi$$

Somit erhält man die Polarisation zu $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$. Und damit erhält man wiederum für die dielektrische Verschiebung

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0 \chi \vec{E} = \varepsilon_0 (1 + \chi) \vec{E}.$$

Faßt man die Klammer zu $\varepsilon := (1 + \chi)$, der Dielektrizitätskonstante (für lineare, isotrope Medien) zusammen, ergibt sich

$$\rightsquigarrow \vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}. \tag{2.74}$$

2.6.2 Randbedingung an Grenzflächen

Betrachtet wird der Übergang der Tangential- und der Normalkomponente des E- und des D-Feldes an einer Grenzfläche (zwischen zwei Medien). Es ergibt sich analog zu Abschn. 2.1.1

$$(i) \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \rightsquigarrow E_1^t = E_2^t \tag{2.75}$$

$$(ii) \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \bar{\varrho} \rightsquigarrow D_2^n - D_1^n = \bar{\sigma}, \tag{2.76}$$

mit $\bar{\sigma}$, der Flächenladungdichte der Überschußladungen. Bei Materialien, die z.B. in der Optik benutzt werden ist $\bar{\sigma}$ immer $= 0$, so daß sowohl die Tangentialkomponenten von $\vec{E}$, als auch die Normalkomponente von $\vec{D}$ stetig durch die Grenzschicht tritt.

Kapitel 3

Magnetostatik

Dieses Kapitel ist im Wesentlichen aufgebaut wie die Elektrostatik. Die benötigte Mathematik unterscheidet sich nicht wesentlich von der im vorigen Kapitel, einige Lösungsansätze können einfach übernommen werden und werden daher hier nicht mehr ausführlich behandelt. Die Unterschiede werden im folgenden herausgearbeitet.

3.1 Grundgleichungen, Vektorpotential

Ist eine zeitunabhängige Stromdichte $\vec{j}(\vec{x})$ vorgegeben, so kann man aus den Maxwell-Gleichungen zwei Gleichungen extrahieren, welche das Verhalten von Magnetfeldern beschreiben:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \tag{3.1}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}. \tag{3.2}$$

Aus diesen beiden Gleichungen kann man nun sofort einige Dinge folgern:

1. Wendet man auf (3.2) die Divergenz an, so ergibt sich

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = 0 = \mu_0 \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{j} \rightsquigarrow \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0}. \tag{3.3}$$

   Ströme die der Bedingung (3.3) genügen, nennt man „stationär“, was bedeutet, daß sich die Ladungsdichte im jeweiligen Raumbereich nicht ändert.

2. Aus Gl. (3.1) folgt, daß es keine magnetischen Ladungen gibt. Desweiteren folgt, daß das B-Feld ein Rotationsfeld ist, da es divergenzfrei ist:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \rightsquigarrow \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \tag{3.4}$$

$\vec{A}$ nennt man „Vektorpotential". Dieses Vektorpotential spielt in der Magnetostatik die Rolle des skalaren Potentials ϕ in der Elektrostatik. Die entstehenden Beziehungen sind denen aus der Elektrostatik analog (bis auf einige, allerdings wichtige, Ausnahmen).

Man kann leicht erkennen, daß die Wahl von $\vec{A}$ nicht eindeutig ist, denn man kann zu $\vec{A}$ ein beliebiges Gradientenfeld addieren, welches bei der Bildung der Rotation wieder verschwindet. Aus diesem Grund führt man eine „Eichtransformation" durch, die das Potential (laut Konvention) dahingehend ändert, daß

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \qquad \text{Coulomb-Eichung} \tag{3.5}$$

gilt. Dies geht dann so vor sich, daß man aus

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{A} + \vec{\nabla}\lambda)$$

das λ bestimmt. Ist nun $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \chi(\vec{x}) \neq 0$, so ergibt sich

$$\Delta\lambda = -\chi(\vec{x}).$$

Diese Gleichung ist aber wieder eine Poisson-Gleichung und hat somit die Lösung (s. Gl. (2.5) $\rightsquigarrow$ (2.7))

$$\lambda(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\chi(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \, \mathrm{d}^3x'.$$

Im folgenden wird immer ein coulomb-geeichtes Potential zugrunde gelegt.

Setzt man nun (3.4) in (3.2) ein, so ergibt sich

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} \underbrace{(\vec{\nabla} \cdot \vec{A})}_{=0} - \Delta\vec{A} = \mu_0 \cdot \vec{j} \rightsquigarrow \boxed{\Delta\vec{A} = -\mu_0 \vec{j}}. \tag{3.6}$$

Diese letzte Gleichung ist das Analogon zur Poisson-Gleichung in der Elektrostatik (2.5), allerdings muß man hier diese Gleichung in drei Komponenten lösen. Voraussetzungen sind wieder, daß die Stromdichte $\vec{j}$ überall gegeben ist und das Vektorpotential im Unendlichen verschwindet.

Die Lösung der Gleichung (3.6) ergibt sich analog der Lösung der „richtigen" Poisson-Gleichung zu

$$\boxed{\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \, \mathrm{d}^3x'}. \tag{3.7}$$

Daraus erhält man gemäß (3.4) das B-Feld zu

$$\begin{aligned} \vec{B} = \vec{\nabla}_x \times \vec{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{\nabla}_x \times \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \, \mathrm{d}^3x' \\ &\overset{\text{s.u.}}{=} \frac{\mu_0}{4\pi} \int -\vec{j}(\vec{x}') \times \vec{\nabla}_x \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \, \mathrm{d}^3x'. \end{aligned}$$

Dabei wurde folgende Formel benutzt ($\vec{a}$ ist ein konstanter Vektor)

$$\vec{\nabla} \times (\vec{a}\varphi) = \varphi \cdot \underbrace{(\vec{\nabla} \times \vec{a})}_{=0} - \vec{a} \times \vec{\nabla}\varphi.$$

Somit ergibt sich also eine Integraldarstellung für $\vec{B}$ zu

$$\boxed{\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{j}(\vec{x}') \times \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \, \mathrm{d}^3x'} \quad \text{Biot-Savartsches Gesetz.} \tag{3.8}$$

Mittels dieses Gesetzes soll nun das Magnetfeldes eines dünnen Leiters, eines sog. „Stromfadens“ bestimmt werden: Dabei soll eine Stromdichte $\vec{j}$ durch ein Fläche $\mathrm{d}\vec{o}' = \widehat{n}\,\mathrm{d}o'$ auf der Länge $\mathrm{d}l'$ fließen, somit ist $\vec{j} = \widehat{n}|\vec{j}|$.
Bildet man nun das Volumenintegral über diese Stromdichte, so ergibt sich

$$\int \vec{j}(\vec{x}') \, \mathrm{d}^3x' = \int \underbrace{\left(\int \widehat{n}|\vec{j}| \, \mathrm{d}o' \right)}_{\text{Gesamtstrom } I \cdot \widehat{n}} \mathrm{d}l' \equiv \int\limits_{\text{Leiter}} I \cdot \mathrm{d}\vec{s}'.$$

Dabei ist $\mathrm{d}\vec{s}' = \widehat{n}\,\mathrm{d}l'$. Damit ergibt sich die Merkregel

$$\vec{j}(\vec{x}') \cdot \mathrm{d}^3x' \longrightarrow I \cdot \mathrm{d}\vec{s}', \tag{3.9}$$

die dann auch auf Gl. (3.8) angewendet wird:

$$\rightsquigarrow \vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \cdot \int\limits_{\text{Leiter}} \mathrm{d}\vec{s}' \times \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3},$$

wobei dieser Schritt etwas schlecht nachzuvollziehen ist! Jedenfalls ergibt sich nun aus dem B-Feld das Vektorpotential zu

$$\rightsquigarrow \vec{A} = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \int\limits_{\text{Leiter}} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \, \mathrm{d}\vec{s}'.$$

Für eine durch $\tau \in [a, b] \rightsquigarrow \vec{x}' = \vec{x}'(\tau)$ parametrisierte Leiterkurve ergibt sich dann

$$\mathrm{d}\vec{s}' = \frac{\mathrm{d}\vec{x}'}{\mathrm{d}\tau} \, \mathrm{d}\tau, \tag{3.10}$$

was man in den Integralen zu ersetzen hat.
Am Beispiel der kreisförmigen Leiterschleife soll das Vorgehen verdeutlicht werden. Bezeichnungen: s. Abb. 3.1

Zuerst ist es angebracht, Zylinderkoordinaten einzuführen:

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \begin{pmatrix} r \cdot \cos\varphi \\ r \cdot \sin\varphi \\ z \end{pmatrix}, \quad \vec{x}' = \begin{pmatrix} R \cdot \cos\varphi' \\ R \cdot \sin\varphi' \\ 0 \end{pmatrix} \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \varphi' \in [0, 2\pi). \end{aligned}$$

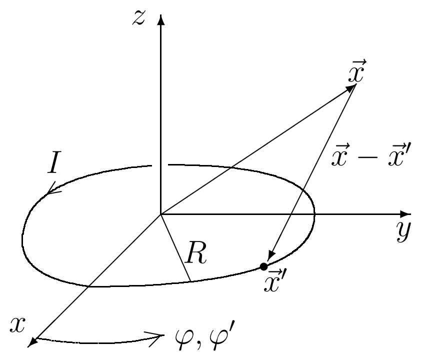

Abbildung 3.1: Zur Anwendung des Biot-Savartschen Gesetzes auf eine Leiterschleife.

Damit ergibt sich gemäß (3.10)

$$\mathrm{d}\vec{s}' = \frac{\mathrm{d}\vec{x}'}{\mathrm{d}\varphi'}\,\mathrm{d}\varphi' = R \cdot \begin{pmatrix} -\sin\varphi' \\ \cos\varphi' \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{d}\varphi'.$$

Dreht man nun das Koordinatensystem so, daß $\varphi = 0$ (d.h., daß sich der Punkt $\vec{x}$ in der xz-Ebene befindet), was wegen der „Invarianz des Systems gegenüber Rotation um die z-Achse“ möglich ist, so ergibt sich der Abstand der Punkte $\vec{x}$ und $\vec{x}'$ zu

$$|\vec{x} - \vec{x}'| = \sqrt{r^2 + z^2 + R^2 - 2rR\cos\varphi'}.$$

Jetzt bietet es sich an, komponentenweise vorzugehen:

- Da der Strom nicht in z-Richtung fließt, ist

$$A_z = 0.$$

- Aufgrund der Antisymmetrie des Integranden ist

$$A_x(\vec{x}) = -\frac{\mu_0 I}{\pi} \cdot R \int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin\varphi'}{\sqrt{r^2 + z^2 + R^2 - 2rR\cos\varphi'}}\,\mathrm{d}\varphi' = 0.$$

- Die A_y-Komponente ist die einzige, die nicht verschwindet:

$$A_y(\vec{x}) = -\frac{\mu_0 I}{\pi} \cdot R \int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi'}{\sqrt{r^2 + z^2 + R^2 - 2rR\cos\varphi'}}\,\mathrm{d}\varphi'.$$

  Hierbei ist ohne weitere Angaben keine allgemeine geschlossene Lösung mehr möglich. Man beachte, daß $A_x = 0$ nur gültig ist wegen der Drehung des KS!

Das Ergebnis in Zylinderkoordinaten lautet: $A_r = A_z = 0,\ A_\varphi = A_y$, was man sich verdeutlichen kann, indem man die kartesischen durch die Zylinder-Einheitsvektoren ausdrückt bzw. umgekehrt.

Somit ergibt sich das B-Feld gemäß (3.4) zu

$$\begin{aligned}
\vec{B}_r &= (\vec{\nabla} \times \vec{A})_r = -\frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \\
\vec{B}_z &= (\vec{\nabla} \times \vec{A})_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r \cdot A_\varphi) \\
\vec{B}_\varphi &= (\vec{\nabla} \times \vec{A})_\varphi = 0.
\end{aligned}$$

3.2 Lokalisierte Stromverteilung

Lokalisierte Stromverteilung, d.h. $\vec{j}(\vec{x})$ vorgegeben im endlichen Volumen V mit $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$. Um dieses Volumen legt man eine Kugel mit Radius R, welche die Stromverteilung vollständig umschließt. Betrachtet wird das Fernfeld am Ort $\vec{x}$ (d.h. $|\vec{x}| \gg R$).

Nun kann man wieder den Betragsterm um $\vec{x}' = 0$ entwickeln:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} &= \frac{1}{|\vec{x}|} + \frac{\vec{x} \cdot \vec{x}'}{|\vec{x}|^3} + \cdots \\
\rightsquigarrow \vec{A}(\vec{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{x})}{|\vec{x} - \vec{x}'|}\, \mathrm{d}^3x' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \Bigg\{ \underbrace{\frac{1}{|\vec{x}|} \int \vec{j}(\vec{x}')\, \mathrm{d}^3x'}_{\text{Monopolterm}} + \underbrace{\frac{1}{|\vec{x}|^3} \int (\vec{x} \cdot \vec{x}') \cdot \vec{j}(\vec{x}')\, \mathrm{d}^3x'}_{\text{Dipolterm}} + \cdots \Bigg\}. \qquad (3.11)
\end{aligned}$$

Diese beiden Terme werden nun einzeln betrachtet:

- Monopolterm: Es gilt:

$$\int \vec{j}(\vec{x})\, \mathrm{d}^3x \overset{!}{=} 0, \qquad (3.12)$$

denn wenn man die Komponenten der Stromdichte umschreibt als $\vec{j}_0 = \vec{j} \cdot \hat{e}_1$ mit dem Einheitsvektor $\hat{e}_1 = \vec{\nabla} x$, dann ergibt sich

$$\rightsquigarrow j_1 = \vec{j} \cdot \vec{\nabla} x = \vec{\nabla}(x \cdot \vec{j}), \quad \text{da } \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0.$$

Die Divergenz des Stroms verschwindet nach Voraussetzung, da $\vec{j}$ stationär ist. Führt man nun das Integral (3.12) aus und wendet dann den Satz von Gauß an, so erhält man

$$\int j_1(\vec{x})\, \mathrm{d}^3x = \int \vec{\nabla} \cdot (x \cdot \vec{j})\, \mathrm{d}^3x \overset{(1.15)}{=} \int (x \cdot \vec{j}) \cdot \mathrm{d}\vec{o} = 0,$$

weil die Stromdichte $\vec{j} = 0$ außerhalb von V ist. Führt man die analogen Rechnungen für die anderen Komponenten durch, folgt die Richtigkeit von (3.12).

Somit ergibt sich, daß man obige Entwicklung erst beim Dipolterm beginnen muß, da keine magnetischen Monopole existieren.

- Dipolterm: Das Integral im Dipolterm ergibt sich zu

$$\int (\vec{x} \cdot \vec{x}')\vec{j}(\vec{x}')\,\mathrm{d}^3x' = -\frac{1}{2}\vec{x}' \times \int \vec{x} \times \vec{j}(\vec{x}')\,\mathrm{d}^3x' = -\vec{x} \times \vec{m}$$

mit dem „magnetischen Dipolmoment"

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\int \vec{x}' \times \vec{j}(\vec{x}')\,\mathrm{d}^3x'. \tag{3.13}$$

Dabei wurde der „wichtige Ausdruck" (Vektor $\vec{a}$ fest)

$$\int (\vec{a} \cdot \vec{x}) \cdot \vec{j}\,\mathrm{d}^3x = -\frac{1}{2}\vec{a} \times \int \vec{x} \times \vec{j}\,\mathrm{d}^3\vec{x} \tag{3.14}$$

benutzt (Herleitung s. Nolting ?!).

Als Ergebnis dieser ganzen Rechnerei hat sich also folgende Entwicklung für das Vektorpotential und somit das B-Feld ergeben:

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m} \times \vec{x}}{|\vec{x}|^3} + \cdots \tag{3.15}$$

$$\vec{B}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3 \cdot \vec{x}(\vec{m} \cdot \vec{x}) - \vec{x}^2 \cdot \vec{m}}{|\vec{x}|^5} + \cdots \tag{3.16}$$

Betrachtet wird nun der Spezialfall der bewegten Ladung q auf der Bahnkurve $\vec{r}(t)$:

$$\begin{aligned}
\rightsquigarrow \vec{j}(\vec{x}) &= \varrho(\vec{x})\,\vec{v} = q \cdot \dot{\vec{r}}\,\delta^3\big(\vec{x} - \vec{r}(t)\big) \\
\vec{m} &= \frac{1}{2}q\int \vec{x} \times \vec{v}\delta^3\big(\vec{x} - \vec{r}(t)\big)\,\mathrm{d}^3x = \frac{q}{2}\vec{r} \times \vec{v} \\
&\rightsquigarrow \boxed{\vec{m} = \frac{q\,\vec{l}}{2m}}, \qquad \vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}.
\end{aligned}$$

Diese letzte Beziehung ist auch in der Quantenmechanik gültig, allerdings nur für den Bahndrehimpuls $\vec{l}$ des Teilchens, *nicht* für den Spin (Eigendrehimpuls), für welchen das magnetische Dipolmoment, wie man aus der Atomphysik-Vorlesung sicher weiß, ungefähr um den Faktor 2 („g-Faktor") größer ist.

Für den dünnen Leiter aus Abb. 3.1 ergibt sich das Dipolmoment mit Hilfe von (3.9) zu

$$\vec{m} = I \cdot \frac{1}{2} \cdot \oint_{\partial S} \vec{x} \times \,\mathrm{d}\vec{s} = I \cdot \hat{n} \cdot F,$$

mit dem Flächeninhalt F der Fläche S, welches die Fläche, die der Leiter in der xy-Ebene umschließt, darstellt.

3.3 Stromverteilung im äußeren Feld

Vorgegeben sei eine lokalisierte Stromverteilung $\vec{j}(\vec{x})$ im Volumen V (d.h. $\vec{j}(\vec{x}) = 0$ f. $\vec{x} \notin V$). V sei begrenzt und liege vollständig in einer Kugel K_R. Weiter sei ein äußeres (langsam veränderliches) Magnet-Feld $\vec{B}(\vec{x})$ vorhanden, welches <u>nicht</u> von der Stromdichte $\vec{j}$ erzeugt werde. Die Stromdichte sei in einer Umgebung von Null verschieden. Dann kann man das B-Feld um $\vec{x} = 0$ entwickeln:

$$B_l(\vec{x}) = B_l(0) + \vec{x} \cdot \vec{\nabla} B_l(0) + \cdots \qquad l = 1, 2, 3$$

Die Kraft, die aufgrund dieses Feldes auf die Ladungsverteilung wirkt, ergibt sich gemäß (1.8) zu

$$\vec{F} = \int \vec{j}(\vec{x}) \times \vec{B}(\vec{x})\, \mathrm{d}^3x = \underbrace{\left[\int \vec{j}(\vec{x})\, \mathrm{d}^3x\right]}_{\overset{(3.12)}{=} 0, \text{ da } \vec{\nabla}\cdot\vec{j}=0} \times \vec{B}(0) + \cdots .$$

Das heißt, daß die höheren Terme der Entwicklung die Kraft bestimmen. Der Einfluß dieser Terme wird im folgenden bestimmt. Dazu wird der „Levi-Civita-Tensor“ (total antisymmetrischer Tensor) benötigt:

$$\epsilon_{ikl} = \begin{cases} 1 & \text{f. } ikl = 123, 312, 231 \\ -1 & \text{f. } ikl = 213, 321, 132 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{3.17}$$

Damit ergibt sich die Kraft zu

$$F_i = \int \sum_{k,l=1}^{3} \epsilon_{ikl} j_k(\vec{x}) B_l(\vec{x})\, \mathrm{d}^3x = \sum_{k,l=1}^{3} \epsilon_{ikl} \int j_k(\vec{x}) \left[\vec{x} \cdot \vec{\nabla} B_l(0)\right] \mathrm{d}^3x. \tag{3.18}$$

Wendet man nun Gl.(3.14) an ($\vec{a} := \vec{\nabla} B_l(0)$), so erhält man

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow \int j_k(\vec{x}) \left[\vec{x} \cdot \vec{\nabla} B_l(0)\right] \mathrm{d}^3x \quad &= \quad -\frac{1}{2} \left[\vec{\nabla} B_l(0) \times \int \vec{x} \times \vec{j}(\vec{x})\, \mathrm{d}^3x\right]_k \\ &\overset{(3.13)}{=} \quad \left[\vec{m} \times \vec{\nabla} B_l(0)\right]_k = \sum_{j,n=1}^{3} \epsilon_{kjn} m_j \frac{\partial B_l}{\partial x_n}. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die gesuchte Kraft aus Gl. (3.18) schließlich zu (man beachte das „$-$“, welches sich durch das Vertauschen der Indizes im ϵ-Tensor ergibt):

$$\begin{aligned}
\rightsquigarrow F_i &= -\sum_{l,j,n=1}^{3} \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{kil}\epsilon_{kjn}\right)}_{\overset{\text{s.u.}}{=} \delta_{ij}\delta_{ln}-\delta_{in}\delta_{lj}} m_j \frac{\partial}{\partial x_n} B_l(0) && (3.19)\\
&= -\sum_{l=1} \left(m_j \frac{\partial}{\partial x_l} B_l(0) - m_l \frac{\partial}{\partial x_i} B_l(0)\right) && (3.20)\\
&= -m_i \underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{B}}_{\overset{(3.1)}{=}0} + \vec{m}\cdot\frac{\partial \vec{B}}{\partial x_i}(0). && (3.21)
\end{aligned}$$

Dabei wurde folgende wichtige Identität aus der Tensorrechnung benutzt:

$$\sum_{i=1}^{3} \epsilon_{ikl}\epsilon_{ijm} = \delta_{kj}\delta_{lm} - \delta_{km}\delta_{lj} \quad \text{Entwicklungssatz,} \tag{3.22}$$

mit der sich u.a. die Vektoridentitäten in Anhang A.2 beweisen lassen. Letztlich ergibt sich die Kraft, die ein äußeres Feld auf eine Stromdichte ausübt zu

$$\boxed{\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{m}\cdot\vec{B})\big|_{\vec{x}=0}}. \tag{3.23}$$

Dabei muß das äußere Feld inhomogen sein, damit überhaupt eine Kraft wirkt. Eine Anwendung dieser Beziehung ist der Stern-Gerlach-Versuch, mit dem die Eigendrehimpulse von Teilchen „nachgewiesen“ werden können.

Drehmoment

Wendet man die obige Entwicklung des äußeren Feldes in der Beziehung für das Drehmoment an, erhält man

$$\begin{aligned}
\vec{N} &= \int \vec{x}\times(\vec{j}\times\vec{B})\,\mathrm{d}^3x \overset{\text{entw.}}{=} \int \vec{x}\times\big(\vec{j}(\vec{x})\times\vec{B}(0)\big)\,\mathrm{d}^3x + \cdots\\
&= \int \left\{[\vec{x}\times\vec{B}(0)]\vec{j}(\vec{x}) - \underbrace{[\vec{x}\cdot\vec{j}]\vec{B}(0)}_{=0}\right\}\mathrm{d}^3x + \cdots .
\end{aligned}$$

Der zweite Summand verschwindet aufgrund seiner Antisymmetrie bei der Integration.

Wendet man nun in der letzten Beziehung noch einmal Gl. (3.14) an, so folgt

$$\begin{aligned}
\rightsquigarrow \vec{N} &\overset{(3.14)}{=} -\tfrac{1}{2}\vec{B}(0)\times\textstyle\int \vec{x}\times\vec{j}(\vec{x})\,\mathrm{d}^3x = \vec{m}\times\vec{B}(0)\\
&\rightsquigarrow \boxed{\vec{N} = \vec{m}\times\vec{B}(0)}. && (3.24)
\end{aligned}$$

Das Drehmoment ergibt sich also aus dem Dipolmoment und dem äußeren Magnetfeld an der jeweils relevanten Stelle (hier $\vec{x} = 0$).

Arbeit

Die Arbeit ΔW, die aufgewendet werden muß, um einen magnetischen Dipol im äußeren Feld um den Winkel θ zu drehen, ergibt sich aus dem Betrag des Drehmoments zu

$$\begin{aligned} |\vec{N}| &= mB\sin\theta, \qquad \mathrm{d}W = -\vec{N}\cdot\mathrm{d}\vec{\theta} \\ \rightsquigarrow \Delta W &= \int\limits_0^\theta mB\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = -mB\cos\theta + mB. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Setzt man die additive Konstante zu Null und schreibt den obigen Term wieder vektoriell als Skalarprodukt, dann erhält man die potentielle Energie zu

$$\boxed{W = -\vec{m}\cdot\vec{B}}. \tag{3.26}$$

3.4 Magnetostatik in Materie

In diesem Abschnitt werden wie in 2.6 die makroskopischen Gleichungen durch Mittelung der mikrospopischen hergeleitet. Die aufretetenden Beziehungen (Mittelung, etc.) unterscheiden sich nicht wesentlich von denen im Abschn. 2.6.

Die magnetischen Eigenschaften von Molekülen/Atomen werden durch die magnetischen Momente $\vec{m}_i$ am Orte $\vec{x}_i$ beschrieben (Die Quellen der magnetischen Momente sind der Bahndrehimpuls oder der Spin der Elektronenhülle). Das Vektorpotential des Dipols $\vec{m}_i$ ergibt sich gemäß (3.15) zu

$$\vec{a}_i(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}_i\times(\vec{x}-\vec{x}_i)}{|\vec{x}-\vec{x}_i|^3}.$$

Das gesamte mikroskopische Vektorpotential ergibt sich als Superposition dieser $\vec{a}_i$ zu

$$\begin{aligned} \vec{A}_M(\vec{x}) &= \sum_{\text{alle } i}\vec{a}_i(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{m}(\vec{x}')\times(\vec{x}-\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3} \\ \text{mit } \vec{m}(\vec{x}) &= \sum_i \vec{m}_i\delta(\vec{x}-\vec{x}_i) \end{aligned}$$

Die Größe $\vec{m}$ bezeichnet man in diesem Zusammenhang als „mikroskopische magnetische Dipoldichte“.

An dieser Stelle wird wieder eine Mittelung über ein kleines Volumen ΔV, welches makroskopisch klein und mikroskopisch groß ist, am Ort $\vec{x}$ durchgeführt. (s. (2.62) ff.):

$$\rightsquigarrow \langle\vec{A}_M(\vec{x})\rangle = \frac{1}{v}\int_{\Delta V}\vec{A}_M(\vec{x}+\vec{\xi})\,\mathrm{d}^3\xi.$$

Daraus ergibt sich (weiter analog zu Abschn. 2.6) das makroskopische Gesamtpotential zu

$$\rightsquigarrow \big\langle \vec{A}(\vec{x}) \big\rangle = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{M}(\vec{x}') \times (\vec{x}-\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3} + \frac{\vec{j}_f(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\,\mathrm{d}^3x'.$$

Dabei ist $\vec{j}_f$ der (makroskopische, also gemittelte) Strom der freien beweglichen Ladungen und $\vec{M} = \langle \vec{m} \rangle$ die mittlere makroskopische Dipoldichte bzw. das mittlere magnetische Moment pro Volumen oder die „Magnetisierung".

Da diese Beziehungen etwas unhandlich erscheinen, führt man noch einige Umformungen durch, man schreibt den linken Teil des Integranden als Gradienten:

$$\int \frac{\vec{M}(\vec{x}') \times (\vec{x}-\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}\,\mathrm{d}^3x = \int \frac{\vec{\nabla}_{x'} \times \vec{M}(\vec{x})}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\,\mathrm{d}^3x'$$

und erhält somit für das gemittelte Vektorpotential (wenn man noch $\vec{j}_M := \vec{\nabla}_{x'} \times \vec{M}$ einsetzt

$$\big\langle \vec{A}(\vec{x}) \big\rangle = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}_M(\vec{x}') - \vec{j}_f(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}, \tag{3.27}$$

was eine Lösung von

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0(\vec{j}_M + \vec{j}_f) \qquad \text{mit } \vec{B} = \vec{\nabla} \times \big\langle \vec{A}(\vec{x}) \big\rangle$$

ist. Setzt man das $\vec{B}$ ein, so ergibt sich

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0(\vec{\nabla} \times \vec{M} + \vec{j}_f) \;\rightsquigarrow \vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu_0} \cdot \vec{B} - \vec{M} \right) = 0.$$

Die Größe in der Klammer bezeichnet man als magnetische Feldstärke $\vec{H}$:

$$\boxed{\vec{H}(\vec{x}) = \frac{1}{\mu_0} \cdot \vec{B}(\vec{x}) - \vec{M}(\vec{x})}, \tag{3.28}$$

womit sich wiederum eine makroskopische Maxwell-Gleichung ergibt:

$$\rightsquigarrow \boxed{\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}_f}. \tag{3.29}$$

Anhand dieser Gleichung kann man erkennen, daß das H-Feld ein Hilfsfeld ist, welches vom Strom freier Ladungen erzeugt wird und nur der Vereinfachung der Maxwell-Gleichungen dient, während das B-Feld die physikalische Meßgröße bleibt, welches von den freien Ladungen und den Dipolen erzeugt wird. Die Maxwell-Gleichung (3.1) bleibt weiterhin erhalten, denn das B-Feld ensteht immer noch als Rotationsfeld aus dem Vektorpotential.

3.4.1 Randbedingungen an Grenzflächen

Es werden zwei Bereiche 1, 2 vorausgesetzt, welche unterschiedliche magnetische Eigenschaften besitzen. Es werden Überlegungen wie in Abschn. 2.1.1 durchgeführt. Man legt ein Volumen ΔV um die Grenzfläche und erhält

$$\int \vec{\nabla} \cdot \vec{B} \, \mathrm{d}^3x \stackrel{(1.15)}{=} \int_{\partial(\Delta V)} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{\sigma} = 0,$$

was bedeutet, daß die Normalkomponente B_n des B-Feldes stetig übergeht:

$$\boxed{\widehat{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0}. \tag{3.30}$$

Integriert man über eine Oberfläche „um" die Grenzschicht, so erhält man

$$\int_S \vec{\nabla} \times \vec{H} \, \mathrm{d}\vec{\sigma} \stackrel{(1.16)}{=} \oint_{\partial S} \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int \vec{j}_f \, \mathrm{d}\vec{\sigma},$$

wobei $\vec{j}_f$ die Stromdichte sein soll, die senkrecht zum Intgrationsweg fließt (in Richtung der Flächennormalen von S). Führt man jetzt einen Tangentenvektor $\vec{t}$ der Grenzfläche so ein, daß er gerade in die Richtung der Flächennormalen von S zeigt, so gilt

$$\boxed{(\vec{t} \times \vec{n}) \cdot (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{t} \cdot \vec{K}}, \tag{3.31}$$

mit $\vec{K}$, dem Flächenstrom in der Grenzfläche. Anhand dieser Beziehung (3.31) kann man ablesen, daß die Tangentialkomponente H_t des H-Feldes nur stetig ist, wenn kein Flächenstrom in der Grenzfläche existiert.

Zum Schluß dieses Kapitels seien noch kurz mögliche Quellen des H-Feldes erwähnt:

- permanente Dipole (durch Spins, Bahnmomente), für die wie in der Elektrostatik $\vec{M} = 0$ gilt, falls kein äußeres Feld angelegt ist (wegen der Wärmebewegung). Eine Ausnahme bilden hier die Ferromagneten unterhalb eine kritischen Temperatur T_c. Stoffe, auf die Obiges zutrifft, nennt man Paramagneten .

- induzierte Dipole, Diamagnetismus:
  Die Erfahrung lehrt, daß die Magnetisierung wiederum vom H-Feld abhängt, also $\vec{M} = \vec{M}(\vec{H})$ gilt (mit Ausnahme der Ferromagneten). Nimmt man wieder wie in der Elektrostatik ein lineares Medium an, so kann man die Magnetisierung recht einfach (eben linear) durch das H-Feld ausdrücken:

$$\rightsquigarrow M_i = \sum_{\vec{j}=1}^{3} \chi_{ij}^m H_j, \tag{3.32}$$

wobei das χ^m materialabhängig ist. χ^m_{ij} bezeichnet man als magnetischen Suszeptibilitäts-Tensor, welcher in linearen isotropen Medien durch eine einzelne Zahl gegeben ist:

$$\text{isotropes Medium:} \qquad \chi^m_{ij} = \delta_{ij}\chi^m,$$

wobei das χ^m einfach magnetische Suszeptibilität heißt. Mit dieser Größe erhält man dann einen recht einfachen Zusammenhang zwischen dem B-Feld und dem H-Feld:

$$\rightsquigarrow \vec{M} = \chi^m \vec{H} \rightsquigarrow \vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0(1 + \chi^m)\vec{H},$$

wobei man die Klammer wieder zusammenfaßt zur „Permeabilität“:

$$\mu := 1 + \chi^m.$$

Damit ergibt sich das B-Feld für eine lineares und isotropes Medium einfach durch

$$\rightsquigarrow \boxed{\vec{B} = \mu_0\mu \cdot \vec{H}}. \tag{3.33}$$

3.5 Skalares (magnetisches) Potential

In Gebieten, in denen die (makroskopische) Stromdichte verschwindet, also $\vec{j} = 0$ ist, kann es sinvoll sein, ein mathematisches Hilfsmittel einzuführen, das skalare (magnetische) Potential ϕ_m, welches aber keine fundamentale Größe ist und bei weitem nicht die Bedeutung hat wie das skalare Potential in der Elektrostatik oder das Vektorpotential in der Magnetostatik.

Denn aus Gl. (3.29) ergibt sich, wenn die Stromdichte verschwindet, daß H als Gradientenfeld geschrieben werden kann:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = 0 \rightsquigarrow \vec{H} = -\vec{\nabla}\phi_m.$$

Es folgen zwei Anwendungsbeispiele:

- Es seien zwei Gebiete V_1, V_2 vorgegeben mit $\mu_1 \neq \mu_2$ und $\vec{j} = 0$. Dann folgt

$$\begin{aligned} \vec{B}_i &= \mu_0\mu_i\vec{H}_i \qquad (i = 1, 2), \qquad H_i = -\vec{\nabla}\phi_m \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B}_i &= 0 \Longleftrightarrow \boxed{\Delta\phi^i_m = 0}, \end{aligned}$$

  was wieder eine Laplace-Gleichung ist und mit vorgegebenen Randbedingungen (Stetigkeit der B^n_i, H^t_i) als solche zu behandeln ist.

- Die Magnetisierung $\vec{M}(\vec{x})$ sei vorgegeben im Volumen V, außerhalb sei Vakuum (mit $\mu = 1$), was zum Beispiel auf einen Permanentmagneten zutrifft. Dann ergibt sich

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = 0, \quad \vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{H} = -\vec{\nabla}\phi_m \end{aligned}\right\} - \Delta\phi_m + \vec{\nabla} \cdot \vec{M} = 0$$

$$\rightsquigarrow \boxed{\Delta\phi_m = \vec{\nabla} \cdot \vec{M}},$$

was eine Poisson-Gleichung (s. (2.5)) ist und somit folgende Lösung gemäß (2.7) hat:

$$\phi_m = -\frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\vec{\nabla}_{x'} \cdot \vec{M}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \, \mathrm{d}^3x' + \phi_0 \quad \text{mit } \Delta\phi_0 = 0.$$

Dabei muß das ϕ_0 wie beschrieben die Laplace-Gleichung erfüllen und an den „Rändern“ 0 und ∞ verschwinden ?!.

Kapitel 4

Zeitabhängige Felder, Strahlungsphänomene

4.1 Grundgleichungen

Die fundamentalen Gleichungen für diesen Abschnitt sind die Maxwell-Gleichungen in Materie, die in den vorigen beiden Kapiteln ansatzweise hergeleitet wurden und auch hier noch ihr Gültigkeit haben. Der Unterschied besteht darin, daß sie nicht mehr entkoppelt sind und die elektrischen und magnetischen Phänomene nicht mehr einzeln behandelt werden können. Außerdem müssen sie nicht mehr zeitlich konstant bleiben. Sie lauten (wenn $\varrho(\vec{x}, t)$ und $\vec{j}(\vec{x}, t)$) die makroskopischen Größen sind):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \varrho \tag{4.1}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \tag{4.2}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \tag{4.3}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \tag{4.4}$$

Die Größe $\partial \vec{D}/\partial t$ nennt man „Verschiebungsstrom“. Das Minuszeichen in der letzten Gleichung beinhaltet die Lenzsche Regel. Indem man auf (4.3) die Divergenz anwendet und dann (4.1) partiell nach der Zeit differenziert einsetzt, erhält man wie in Kapitel 1 die Kontinuitätsgleichung (1.5)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0, \tag{4.5}$$

welche das Ladungserhaltungsgesetz in differentieller Form beschreibt.

Weitere wichtige Gleichungen sind die Materiegleichungen für lineare isotrope Medien (2.74) und (3.33):

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \cdot \vec{E} \tag{4.6}$$
$$\vec{B} = \mu\mu_0 \cdot \vec{H} \tag{4.7}$$

und das „Ohmsche Gesetz“

$$\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}, \qquad \sigma: \text{ Leitfähigkeit.} \tag{4.8}$$

Im Vakuum gilt $\varepsilon = \mu = 1, \sigma = 0$.

Quasistationäre Felder

Kann man davon ausgehen, daß der Verschiebungsstrom $\dot{\vec{D}} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \approx 0$ ist, so kann man diesen Term gegenüber dem $\vec{j}$ in (4.3) vernachlässigen und erhält somit, daß

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} \cong \vec{j}(\vec{x}, t)$$

näherungsweise gültig ist. Damit kann man genauso folgern wie in der Magnetostatik (Existenz des Vektorpotentials aus dem sich dann das B-Feld ergibt usw.)

$$\rightsquigarrow \vec{A}(\vec{x}, t) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{x}', t)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \, \mathrm{d}^3x' \rightsquigarrow \vec{B}(\vec{x}, t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}.$$

Die Anwendung dieses „Phänomens“ liegt bei den Wechselströmen kleiner Frequenzen.

Energiebilanz

Die allgemeinste Kraft, die auf eine Ladungsdichte kombiniert mit einer Stromdichte wirken kann, ergibt sich aus einer Kombination aus Coulomb-Kraft und magnetischer Kraft:

$$\vec{F} = \int \Big(\underbrace{\varrho \cdot \vec{E}}_{=:\vec{f}_c} + \underbrace{\vec{j} \times \vec{B}}_{=:\vec{f}_m} \, \mathrm{d}^3x \Big) = \int \vec{f}(\vec{x}, t) \, \mathrm{d}^3x \tag{4.9}$$

$$\text{mit } \vec{f}(\vec{x}, t) = \vec{f}_c + \vec{f}_m \quad \text{Kraftdichte.} \tag{4.10}$$

Aus der Kraftdichte ergibt sich die pro Volumen verrichtete Arbeit zu

$$\begin{aligned} \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{s} &= \vec{f} \cdot \vec{v} \, \mathrm{d}t = \varrho \vec{E} \cdot \vec{v} \, \mathrm{d}t + \underbrace{\vec{f}_m \cdot \vec{v}}_{=0} \, \mathrm{d}t \\ &= \vec{j} \cdot \vec{E} \, \mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Der hintere Summand verschwindet wegen $\vec{j} = \varrho \cdot \vec{v}$, da wegen (4.9) $\vec{v}$ senkrecht auf $\vec{f}_m$ steht und somit das Skalarprodukt verschwindet. Daraus kann man folgern, daß der Anteil der Kraft, die vom Magnetfeld herrührt keine Arbeit verrichtet, also „konservativ“ ist. Den Ausdruck $\vec{j} \cdot \vec{E}$ nennt man „Leistungsdichte“, aus der sich dann mittels Volumenintegration die Gesamtleistung im Volumen V ergibt:

$$\frac{\mathrm{d}W_V}{\mathrm{d}t} = \int_V \vec{j} \cdot \vec{E}\,\mathrm{d}^3x \stackrel{(4.3)}{=} \int_V \left[(\vec{\nabla} \times \vec{H}) \cdot \vec{E} - \dot{\vec{D}} \cdot \vec{E}\right] \mathrm{d}^3x. \tag{4.12}$$

Wendet man die Vektoridentität (s. A.2)

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{H}(\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{E}(\vec{\nabla} \times \vec{H})$$

auf (4.12) an, erhält man

$$\frac{\mathrm{d}W_V}{\mathrm{d}t} = -\int_V \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H})\,\mathrm{d}^3x - \int_V \left[\vec{E} \cdot \dot{\vec{D}} + \vec{H} \cdot \dot{\vec{B}}\right] \mathrm{d}^3x. \tag{4.13}$$

Setzt man lineare, isotrope Medien voraus, kann man das zweite Integral umschreiben (unter Anwendung der Gln. (4.6),(4.7))

$$\vec{E} \cdot \dot{\vec{D}} + \vec{H} \cdot \dot{\vec{B}} = \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\frac{1}{2}\left(\varepsilon\varepsilon_0 \cdot \vec{E}^2 + \mu\mu_0 \vec{H}^2\right)}_{=:w(\vec{x},t)}. \tag{4.14}$$

w nennt man Energiedichte des elektromagnetischen Feldes.

Definiert man eine weitere Größe:

$$\vec{S} := \vec{E} \times \vec{H} \qquad \text{Poynting-Vektor}, \tag{4.15}$$

so folgt aus Gl. (4.12)

$$\rightsquigarrow \int_V \vec{j} \cdot \vec{E}\,\mathrm{d}^3x = -\int_V \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{S} + \frac{\partial w}{\partial t}\right) \mathrm{d}^3x. \tag{4.16}$$

Zieht man das alles zusammen unter ein Integral und setzt ein beliebiges Volumen voraus, so folgt, das der neue Integrand verschwinden muß:

$$\boxed{-\frac{\partial w}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot \vec{S} + \vec{j} \cdot \vec{E}}. \qquad \text{Poynting-Theorem} \tag{4.17}$$

Die Gleichung kann in eine Integralgleichung überführt werden, wenn man den Satz von Gauß ((1.15)) anwendet und wegen der zeitlichen Konstanz des Volumens V die Ableitung vor das Integral zieht:

$$\boxed{-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_V w(\vec{x}, t)\,\mathrm{d}^3x = \int_{\partial V} \vec{S} \cdot \mathrm{d}\vec{o} + \int_V \vec{j} \cdot \vec{E}\,\mathrm{d}^3x}. \quad \text{Poynting-Theorem} \tag{4.18}$$

Diese Gleichung (4.18) läßt nun aber auch eine physikalische Interpretation zu. Der linke Teil steht für die Energieabnahme im Volumen V, welche sich aus der aufgebrachten Leistung im Volumen ($\int_V \vec{j} \cdot \vec{E}$) und dem Energiefluß durch die Hülle ($\int_{\partial V} \vec{S} \cdot \mathrm{d}\vec{o}$) ergibt. Somit kann man das Poynting-Theorem als Energiesatz auffassen, welcher sowohl die mechanische Arbeit an den Ladungen in V als auch die wegströmende Energie berücksichtigt.

Die Dimension des Poynting-Vektors ist somit offenbar Energie pro Fläche und Zeit. $\vec{S}$ repräsentiert somit die Energiestromdichte des elektromagnetischen Feldes, $\vec{S}/|\vec{S}|$ die Richtung des Energiestroms.

Eine Folgerung aus (4.13)+(4.14) ist noch erwähnenswert: Die Gesamtenergie des elektromagnetischen Feldes ergibt sich aus Integration über die Energiedichte:

$$W = \int_V w(\vec{x}, t)\, \mathrm{d}^3x. \tag{4.19}$$

4.2 Elektromagnetische Wellen

Es werden wieder lineare, isotrope Medien vorausgesetzt. Weiterhin werden „freie Felder“ betrachtet, d.h. $\vec{j} = 0, \varrho = 0$. Somit ergibt sich aus den Maxwell-Gleichungen ((4.1)-(4.4))

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \varepsilon\mu\varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{4.20}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{4.21}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \tag{4.22}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \tag{4.23}$$

Aus diesen Gleichung erhält man wie in Abschnitt 1.2, Gln. (1.13) und (1.14) Wellengleichungen für die E und die B-Welle:

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \tag{4.24}$$

$$\Delta\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0, \tag{4.25}$$

wobei

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu\varepsilon_0\mu_0}} = \frac{c_0}{n}$$

die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle ist. $c_0 = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ ist die Vakuumlichtgeschwindigkeit und $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$ der „Brechungsindex“.

Da jede Komponente der E, B-Welle der Wellengleichung genügen muß, kann man die Wellengleichung auch umschreiben:

$$\boxed{\Box\psi = 0} \quad \psi = E_i, B_i, \tag{4.26}$$

$$\text{mit } \Box = \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad \text{d'Alembert-, „Quabla"-Operator.}$$

Ein Spezialfall, der die obige Gleichung löst sind die ebenen Wellen.

4.2.1 Ebene Wellen, Polarisation

Die Wellengleichung wird durch folgenden Ansatz gelöst:

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{E}_0 \cdot e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)}, \quad \vec{B}(\vec{x}, t) = \vec{B}_0 \cdot e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)}, \tag{4.27}$$

wobei $\vec{E}_0$, $\vec{B}_0$ konstante Amplituden-Vektoren sind. ω soll eine Konstante sein, die in beiden Gleichungen identisch ist (Grund: s.u.).

Man sollte beachten, daß eine imaginäre Größe natürlich physikalisch keinen Sinn macht, man hat nur den Realteil der Welle zu betrachten, die komplexen Größen sind nur geeignete Rechenhilfen (nur geeignet für lineare Rechenoperationen).

Die bisher unbestimmten Konstanten erhalten eine Bedeutung, wenn man obige Ansätze aus (4.27) in die Dgl. (4.26) einsetzt:

$$\longrightarrow \vec{k}^2 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 = 0. \tag{4.28}$$

Mit $k = |\vec{k}|$ erhält man dann prinzipiell nichts Neues:

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{E}_0 \cdot e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} \mp \omega t)} \\ \vec{B}(\vec{x}, t) = \vec{B}_0 \cdot e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} \mp \omega t)} \end{array}}_{\omega = c\cdot k.}$$

Flächen konstanter Phase

Betrachtet werden Flächen konstanter Phase, d.h., daß $\vec{E}$ und $\vec{B}$ konstant sind und somit folgendes gelten muß:

$$\varphi = \vec{k}\cdot\vec{x} \mp \omega t = const \quad \text{f. festes } t$$

auf Flächen, die senkrecht zu $\vec{k}$ stehen.

Daraus kann man ablesen, daß die Ausbreitung der Wellen in $\pm\vec{k}$-Richung mit der „Phasengeschwindigkeit“

$$\boxed{v_p = \frac{\omega}{k} = c} \tag{4.29}$$

stattfindet.

Den Vektor $\vec{k}$ nennt man Wellenvektor, dessen Richtung $\hat{k} = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}$ die Ausbreitungsrichtung der Welle angibt.

Den kürzesten Abstand zwischen zwei Punkten gleicher Amplitude und Bewegungsrichtung erhält man, indem man

$$\vec{E}(\vec{x} + \lambda\hat{k}, t) = \vec{E}(\vec{x}, t)$$

setzt und somit

$$\begin{aligned} &\rightsquigarrow e^{i(\vec{k}\vec{x}+\lambda k)} = e^{i(\vec{k}\vec{x})} \rightsquigarrow e^{i\lambda k} = 1 \\ &\rightsquigarrow \boxed{\lambda = \frac{2\pi}{k}} \quad \text{Wellenlänge.} \end{aligned} \tag{4.30}$$

Die Schwingungsdauer ist definert als die Zeit, in der die Amplitude am festen Ort $\vec{x}$ zweimal alle Werte angenommen hat:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{x}, t+T) = \vec{E}(\vec{x}, t) \rightsquigarrow e^{\mp i\omega T} = 1 \rightsquigarrow \omega T = 2\pi \\ \rightsquigarrow \boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}. \end{aligned}$$

Wellen, die diesen Beziehungen (für λ und T) genügen, nennt man ebene Wellen oder monochromatische Wellen. Analoge Beziehungen gelten selbstverständlich für das B-Feld.

Weitere Einschränkungen für die elektromagnetischen Wellen erhält man, wenn man berücksichtigt, daß sowohl $\vec{E}$ als auch $\vec{B}$ alle Maxwell-Gleichungen (4.1)-(4.4) erfüllen müssen:

$$\left.\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \ \forall \vec{x}, t \iff i\vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \iff \vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \ \forall \vec{x}, t \iff i\vec{k} \cdot \vec{B} = 0 \iff \vec{k} \cdot \vec{B}_0 = 0 \end{aligned}\right\} \vec{k} \perp \vec{E}_0, \vec{B}_0.$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E} = i\vec{k} \times \vec{E} \overset{!}{=} -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = i\omega\vec{B} \ \forall \vec{x}, t \iff \vec{k} \times \vec{E}_0 = \omega \cdot \vec{B}_0 \\ \iff \vec{B}_0 = \frac{1}{\omega}\vec{k} \times \vec{E}_0 \overset{(4.28)}{=} \frac{1}{c}\frac{\vec{k}}{k} \times \vec{E}_0 = \frac{1}{c}\hat{k} \times \vec{E}_0 \\ \rightsquigarrow \boxed{\vec{B}_0 = \frac{1}{c} \cdot \hat{k} \times \vec{E}_0}. \end{aligned} \tag{4.31}$$

Aus dieser Rechnung ergibt sich letztlich, daß $\vec{k}$ senkrecht auf $\vec{E}$ und $\vec{B}$ steht. Das wird als Transversalität der elektromagnetischen Welle bezeichnet. Weiterhin stehen $\vec{E}$ und $\vec{B}$ senkrecht aufeinander, so daß $\hat{k}$, $\vec{E}_0/E_0$ und $\vec{B}_0/B_0$ ein sog. „orthogonales Rechtssystem“ bilden.

Polarisation

Im folgenden wird nur die E-Welle diskutiert, da nach Gl. (4.31) die E- und die B-Welle miteinander verknüpft sind.

Das Phänomen der Polarisation wird als bekannt vorausgesetzt, es werden nur die mathematischen Hintergründe näher beleuchtet.

Man kann o.B.d.A annehmen, daß die Ausbreitungsrichtung der Welle die z-Richtung ist, also gilt:

$$\hat{k} = \hat{e}_z \rightsquigarrow \vec{k} \cdot \vec{x} = k \cdot z \rightsquigarrow \vec{E} = \vec{E}_0 \cdot e^{i(kz-\omega t)}.$$

Aus der Transversalität der Welle folgt, daß sich $\vec{E}_0$ in der (x, y)-Ebene befinden muß. Den Vektor $\vec{E}_0$ kann man somit zerlegen in eine x- und einen y-Anteil:

$$\rightsquigarrow \vec{E}_0 = E_0^x \cdot \hat{e}_x + E_0^y \cdot \hat{e}_y,$$

wobei die E_0^x und E_0^y i.a. komplex, also von folgender Form sind:

$$E_0^x = |E_0^x| \cdot e^{i\varphi}; \qquad E_0^y = |E_0^y| \cdot e^{i\varphi+\delta},$$

wobei δ die Phasenverschiebung der beiden Anteile darstellen soll. Hierbei werden nun zwei wichtige Spezialfälle unterschieden:

1. lineare Polarisation: $\delta = 0$ oder $\delta = \pm\pi$.

$$\vec{E} = \underbrace{(|E_0^x|\hat{e}_x \pm |E_0^y|\hat{e}_y)}_{=\vec{E}_0 \text{ fest,rell}} \cdot e^{i(kz-\omega t+\varphi)}. \tag{4.32}$$

   Betrachtet man hiervon den Realteil, so stellt man fest, daß im vorgegebenen Fall die E-Welle nur in einer Richtung schwingt. Den Einheitsvektor $\vec{E}_0/|\vec{E}_0|$ bezeichnet man als „Polarisationsvektor“.

   Die beiden (linear unabhängigen) Einheitsvektoren $\hat{e}_x, \hat{e}_y$ bilden somit eine lineare Basis des Polarisationsvektors bzw. der Welle.

2. elliptische/zirkulare Polarisation: $\delta = \pm\pi/2$.

$$\vec{E} = |E_0^x|\hat{e}_x \cdot e^{i(kz-\omega t+\varphi)} + |E_0^y|\hat{e}_y \cdot e^{i(kz-\omega t+\varphi\pm\frac{\pi}{2})}.$$

Betrachtet man wiederum den „physikalischen“ Anteil der Welle, also den Realteil, so erhält man

$$\Re(\vec{E}) = |E_0^x|\hat{e}_x \cdot \cos(kz - \omega t + \varphi) + |E_0^y|\hat{e}_y \cdot \sin(kz - \omega t + \varphi).$$

Man sieht, daß der Polarisationsvektor $\widehat{E}_0$ im Fall $\delta = +\pi/2$ bzw. $-\pi/2$ eine Ellipse im mathematisch positiven bzw. negativen Sinn durchläuft. Für den Spezialfall $|E_0^x| = |E_0^y|$ ergibt sich eine „zirkular“ polarisierte Welle. Man spricht für $\delta = +\pi/2$ bzw. $-\pi/2$ von einer rechts- bzw. linkszirkularen Welle.

Basiswechsel

Man kann den Polarisationsvektor, der bisher durch die kartesischen Einheitsvektoren $\hat{e}_x$ und $\hat{e}_y$ ausgedrückt wurde, auch durch „zirkulare Einheitsvektoren“ ausdrücken:

$$\begin{aligned} \vec{E}_\pm(\vec{x}, t) &= \underbrace{E_0}_{>0,\text{reell}} \cdot (\hat{e}_x + \hat{e}_y \cdot e^{\pm i\pi/2}) \cdot e^{i(kz - \omega t)} \\ &= E_0 \cdot (\hat{e}_x \pm i\hat{e}_y) \cdot e^{i(kz-\omega t)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Def.:} \qquad \hat{e}_\pm &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{e}_x \pm i\hat{e}_y), & |\hat{e}_\pm| &= \hat{e}_\pm \cdot \hat{e}_\mp = 1 \\ \rightsquigarrow \hat{e}_x &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{e}_+ + \hat{e}_-), & \hat{e}_y &= \frac{i}{\sqrt{2}}(\hat{e}_+ - \hat{e}_-). \end{aligned} \tag{4.33}$$

Mittels dieser Definition kann man eine linear polarisierte Welle als Superposition von zwei zirkular polarisierten Wellen darstellen:

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow \vec{E}_{\text{lin}} &= (E_0^x\, \hat{e}_x + E_0^y\, \hat{e}_y) \cdot e^{i(kz-\omega t)} \\ &\overset{(4.33)}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}\big((E_0^x - iE_0^y)\hat{e}_+ + (E_0^x + iE_0^y)\hat{e}_-\big) \cdot e^{i(kz-\omega t)}. \end{aligned}$$

Die lineare und die zirkulare Basis sind also mathematisch äquivalent und ermöglichen jeweils eine evtl. geschicktere Darstellung der elektromagnetischen Wellen. In der Quantenelektrodynamik ist jedoch die zirkulare Basis anscheinend die fundamentalere.

Energietransport

Es ist bereits bekannt, daß der Poynting-Vektor die Energiestromdichte der elektromagnetischen Welle darstellt.

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{1}{\mu\mu_0}\vec{E} \times \vec{B},$$

wobei den physikalischen Energietransport natürlich nur die Realteile der Feldkomponenten liefern. Die Felder ergaben sich zu

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{x},t) &= \underbrace{\vec{E}_0 \cdot e^{i\vec{k}\cdot\vec{x})}}_{=:\vec{\mathcal{E}}(\vec{x})} \cdot e^{-i\omega t} \equiv \vec{\mathcal{E}}(\vec{x}) \cdot e^{-i\omega t} \\ \vec{B}(\vec{x},t) &\overset{(4.31)}{=} \frac{1}{c}\widehat{k} \times \vec{E}_0 \cdot e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \cdot e^{-i\omega t} \equiv \frac{1}{c}\widehat{k} \times \vec{\mathcal{E}}(\vec{x}) \cdot e^{-i\omega t}. \end{aligned} \tag{4.34}$$

Die „physikalischen" Realteile ergeben sich zu

$$\begin{aligned} \Re(\vec{E}) &= \Re(\vec{\mathcal{E}}) \cos\omega t + \Im(\vec{\mathcal{E}}) \sin\omega t \\ \Re(\vec{B}) &= \frac{1}{ck}\Big(\Re(\vec{k} \times \vec{\mathcal{E}}) \cos\omega t + \Im(\vec{k} \times \vec{\mathcal{E}}) \sin\omega t\Big). \end{aligned}$$

Der „physikalische"Poynting-Vektor ergibt sich aus

$$\rightsquigarrow \vec{S} = \frac{1}{\mu\mu_0}\Re(\vec{E}) \times \Re(\vec{B}) = \vec{S}(t). \tag{4.35}$$

Diese Größe wird dann über eine Periode gemittelt:

$$\langle\vec{S}\rangle := \frac{1}{T}\int_0^T \vec{S}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Betrachtet man nur das Kreuzprodukt aus (4.35), erhält man

$$\begin{aligned} \big\langle\Re(\vec{E}) \times \Re(\vec{B})\big\rangle &= \frac{1}{ck}\Big\{\Re(\vec{\mathcal{E}}) \times \Re(\vec{k} \times \vec{\mathcal{E}}) \cdot \underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T \cos^2\omega t\,\mathrm{d}t}_{=1/2} \\ &\quad + \Im(\vec{\mathcal{E}}) \times \Im(\vec{k} \times \vec{\mathcal{E}}) \cdot \underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T \sin^2\omega t\,\mathrm{d}t}_{=1/2} \\ &\quad + \big(\Re(\vec{\mathcal{E}}) \times \Im(\vec{k} \times \vec{\mathcal{E}}) + \Im(\vec{\mathcal{E}}) \times \Re(\vec{k} \times \vec{\mathcal{E}})\big) \\ &\quad \cdot \underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T \cos\omega t \cdot \sin\omega t\,\mathrm{d}t}_{=0}\Big\} \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{ck}\Big\{\Re(\vec{\mathcal{E}}) \times \Re(\vec{k} \times \vec{\mathcal{E}}) + \Im(\vec{\mathcal{E}}) \times \Im(\vec{k} \times \vec{\mathcal{E}})\Big\} \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{ck}\Re\big\{\vec{\mathcal{E}} \times (\vec{k} \times \vec{\mathcal{E}}^*)\big\} \end{aligned} \tag{4.36}$$

$$\begin{aligned}
&\overset{\text{Entw.satz}}{=} \frac{1}{2}\frac{1}{ck}\Re\{\vec{k}(\vec{\mathcal{E}}\cdot\vec{\mathcal{E}}^*) - \vec{\mathcal{E}}^*\underbrace{(\vec{k}\cdot\vec{\mathcal{E}})}_{=0}\} \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{ck}\vec{k}\cdot\Re\left(\vec{E}_0\cdot e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\cdot\vec{E}_0^*\cdot e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}\right) \\
&= \frac{1}{c}\cdot\widehat{k}\cdot\frac{1}{2}|\vec{E}_0|^2. \qquad (4.37)
\end{aligned}$$

Mit $c = 1/\sqrt{\mu\varepsilon\mu_0\varepsilon_0}$ erhält man somit den Poynting-Vektor zu

$$\rightsquigarrow \boxed{\langle\vec{S}\rangle = \widehat{k}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}}\cdot|\vec{E}_0|^2}. \qquad (4.38)$$

Die Energiedichte der elektromagnetischen Welle ergibt sich aus der Energiedichte des E-Feldes und des B-Feldes zu

$$w(\vec{x},t) = \frac{1}{2}\left(\varepsilon\varepsilon_0\Re(\vec{E})\cdot\Re(\vec{E}) + \frac{1}{\mu\mu_0}\cdot\Re(\vec{B})\cdot\Re(\vec{B})\right).$$

Führt man die Mittelung über eine Periode aus, welche sich analog den Schritten (4.36)-(4.37) ergibt, erhält man

$$\begin{aligned}
\langle w\rangle &= \frac{1}{T}\int_0^T w(\vec{x},t)\,\mathrm{d}t = \cdots \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left\{\varepsilon\varepsilon_0\cdot\Re(\vec{\mathcal{E}}\cdot\vec{\mathcal{E}}^*) + \frac{1}{\mu\mu_0c^2k^2}\cdot\Re\left((\vec{k}\times\vec{\mathcal{E}})(\vec{k}\times\vec{\mathcal{E}}^*)\right)\right\} \\
&= \frac{1}{4}\left\{\varepsilon\varepsilon_0|\vec{E}_0|^2 + \frac{1}{\mu\mu_0}\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\underbrace{|\widehat{k}\times\vec{\mathcal{E}}|^2}_{=|\vec{E}_0|^2}\right\}.
\end{aligned}$$

Somit ergibt sich als Ergebnis die Energiedichte zu

$$\rightsquigarrow \boxed{\langle w\rangle = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0|\vec{E}_0|^2}. \qquad (4.39)$$

Das ist aber fast dasselbe wie die Energiestromdichte bzw. der Poynting-Vektor in (4.38), der sich, ausgedrückt durch die Energiedichte, dann wie folgt ergibt:

$$\rightsquigarrow \boxed{\langle\vec{S}\rangle = \underbrace{\widehat{k}\cdot c}_{=:\vec{c}}\langle w\rangle = \langle w\rangle\cdot\vec{c}}. \qquad (4.40)$$

4.2.2 Wellenpakete

In diesem Abschnitt benötigt man als mathematisches Hilfsmittel die Fouriertransformation, welche nun kurz eingeführt wird:

Eindimensionale Fourier-Transformation

Sei $f(x)$ eine beliebige, quadratintegrable Funktion, d.h.

$$\int |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x \quad \text{existiert.}$$

Dann kann man f durch ein Fourier-Integral folgender Form darstellen:

$$\rightsquigarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k) \cdot e^{ikx} \, \mathrm{d}k, \tag{4.41}$$

wobei $\tilde{f}$ die zu f gehörende Fourier-Transformierte ist, die sich durch die Umkehrtransformation aus f ergibt:

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x')e^{-ikx'} \, \mathrm{d}x' \tag{4.42}$$

Setzt man zur Probe die letzte Gleichung in (4.41) ein, ergibt sich

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x')e^{ik(x-x')} \, \mathrm{d}x' \, \mathrm{d}k \\ &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x') \cdot \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-x')} \, \mathrm{d}k \, \mathrm{d}x' \stackrel{!}{=} f(x). \end{aligned} \tag{4.43}$$

Daraus folgt, daß obiges Integral über die e-Funktion der δ-Funktion entsprechen muß:

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-x')} = \delta(x - x'). \tag{4.44}$$

Die δ-Funktion ist also die Fourier-Transformierte der 1 und umgekehrt!

Das Fourier-Integral (4.41) kann man auch als Entwicklung der Funktion $f(x)$ nach einem Satz geeigneter orthogonaler Funktionen $\varphi_k(x)$ auffassen, welche im Gegensatz zu Abschn. 2.4.1 jedoch kontinuierlich verteilt sind. Man definiert:

$$\varphi_k := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}.$$

Das Funktionen-System der φ_k ist gemäß den Überlegungen aus 2.4.1 vollständig, die Vollständigkeitsrelation (2.33) ist erfüllt:

$$\boxed{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_k^*(x) \cdot \varphi_k(x') \, \mathrm{d}k \stackrel{(4.43)}{=} \delta(x - x')}. \tag{4.45}$$

Die Orthogonalitäts-Relation (2.29) geht über in eine sog. „verallgemeinerte“ Orthogonalitäts-Relation:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k^*(x) \cdot \varphi_{k'}(x)\,\mathrm{d}x = \delta(k-k')}. \tag{4.46}$$

Durch diese Beziehung wird zwar ausgedrückt, daß das Skalarprodukt der Funktionen verschwindet, wenn die Indizes ungleich sind, jedoch ist keine Normierung auf 1 gegeben. Man kann diese Funktionen lediglich auf die δ-Funktion normieren.

Damit ist also gezeigt, daß die oben definierten φ_k ein vollständiges Funktionensystem bilden und sich somit eine quadratintegrable Funktion $f(x)$ tatsächlich nach ihnen entwickeln (bzw. durch ein Fourier-Integral darstellen) läßt.

$$\leadsto \boxed{f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k)\varphi_k(x)\,\mathrm{d}k}.$$

Dreidimensionale Verallgemeinerung

Die Sachverhalte, die zur eindimensionalen Fourier-Transformation geführt haben, lassen sich ohne Mühe in das Mehrdimensionale übertragen, die Funktionen φ_k haben im Dreidimensionalen folgende Gestalt:

$$\varphi_{\vec{k}}(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3} \cdot e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x})}.$$

Ein quadratintegrables $f(\vec{x})$ kann man nun nach diesen $\varphi_{\vec{k}}$ entwickeln:

$$f(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int\limits_{\substack{\text{ganzer}\\ \text{Raum}}} \tilde{f}(\vec{k}) \cdot e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\,\mathrm{d}^3k,$$

$$\text{mit } \tilde{f}(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int f(\vec{x}) \cdot e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}\,\mathrm{d}^3x.$$

Die Gleichungen (4.45) und (4.46) gehen über in

$$\int \varphi_{\vec{k}}^*(\vec{x}) \cdot \varphi_{\vec{k}}(\vec{x}')\,\mathrm{d}^3k = \delta^3(\vec{x}-\vec{x}')$$

$$\int \varphi_{\vec{k}}^*(\vec{x}) \cdot \varphi_{\vec{k}'}(\vec{x})\,\mathrm{d}^3x = \delta^3(\vec{k}-\vec{k}').$$

Anwendung der Fourier-Transformation

Es wird nur der Spezialfall der Überlagerung von ebenen Wellen mit der gleichen Ausbreitungsrichtung (o.B.d.A $\widehat{k} = \hat{e}_z$) betrachtet.

Die monochromatische Lösung lautete:

$$\psi_k = a_k \cdot e^{i(kz-\omega t)}.$$

Durch Superposition ergibt sich nun das Wellenpaket:

$$\rightsquigarrow \psi(\vec{x},t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} a(k) \cdot e^{i(kz-\omega t)} \,\mathrm{d}k,$$

wobei die $\vec{x}$-Abhängigkeit eine reine z-Abhängigkeit bedeutet. Die Funktion $a(k)$ nennt man „Spektral-“ oder Amplitudenfunktion.

Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei eine Anfangsverteilung

$$u(z) := \psi(\vec{x},0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} a(k) \cdot e^{ikz} \,\mathrm{d}k$$

vorgegeben, aus der sich dann mittels Fouriertransformation die Spektralfunktion ergibt:

$$\rightsquigarrow a(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(z) \cdot e^{-ikz} \,\mathrm{d}z. \tag{4.47}$$

Für spätere Zeiten $t > 0$ ergibt sich dann

$$\psi(\vec{x},t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(z') \cdot e^{i(k(z-z')-\omega t)} \,\mathrm{d}z' \,\mathrm{d}k, \tag{4.48}$$

wobei ω eine Funktion in Abhängigkeit von k sein kann

$$\omega = c(k) \cdot k = \omega(k); \qquad c = c_0/n, \quad n = \sqrt{\varepsilon\mu}.$$

Man hat eine Fallunterscheidung bzgl. des Brechungsindizes n zu treffen:

a) $n = \mathit{const}$ z.B. im Vakuum

$$\begin{aligned} \omega &= c \cdot k, \quad c = c_0 = \mathit{const} \\ \rightsquigarrow \psi(\vec{x},t) \equiv \psi(z,t) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(z') \cdot \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ik(z-z'-ct)} \,\mathrm{d}k}_{=\delta(z-ct-z')} \,\mathrm{d}z' \\ &= u(z-ct) = \psi(z-ct). \end{aligned}$$

In diesem einfachsten Fall verschiebt sich demnach die Anfangsverteilung unverzerrt in z-Richtung mit der Phasengeschwindigkeit $c =: v_p$.

b) Dispersion, $\omega = \omega(k)$. In diesem Fall kann man sich meist die Anfangsverteilung u aufgebaut aus monochromatischen Wellen in einem kleinen Bereich um k_0 denken und somit das $\omega(k)$ um k_0 entwickeln, falls dessen Abhängigkeit von k genügend schwach ist:

$$\omega(k) = \underbrace{\omega(k_0)}_{=:\omega_0} + \underbrace{\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}(k_0)}_{=:v_G} \cdot (k - k_0) + \cdots ,$$

wobei v_G die sog. „Gruppengeschwindigkeit“ ist. Das ist die Geschwindigkeit, mit der sich das Wellenpaket ausbreitet. Man muß diese Geschwindigkeit klar von der Phasengeschwindigkeit unterscheiden, denn in dispersiven Medien haben Wellen verschiedener Frequenz unterschiedliche Phasengeschwindigkeiten, das Wellenpaket „bewegt“ sich jedoch mit v_G. Also

$$\rightsquigarrow \omega \approx \omega_0 + v_G \cdot (k - k_0).$$

Damit ergibt sich die Welle zum Zeitpunkt t zu

$$\begin{aligned}
\psi(z,t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(z') \int_{-\infty}^{\infty} e^{i[k(z-z') - \omega_0 t - (k-k_0)v_g t]} \,\mathrm{d}k \,\mathrm{d}z' \\
&= e^{i(v_G \cdot k_0 - \omega_0)t} \int_{-\infty}^{\infty} u(z') \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(z-z'-v_G \cdot t)} \,\mathrm{d}k}_{=\delta(z - v_g t - z')} \,\mathrm{d}z' \\
&= e^{i(v_G \cdot k_0 - \omega_0)t} \cdot u(z - v_g \cdot t).
\end{aligned}$$

Diese Welle ergibt sich wiederum aus der verschobenen Anfangsverteilung, jedoch zusätzlich multipliziert mit einem oszillierenden Faktor.

Allgemeiner Fall: Falls der Bereich mit $a(k) \neq 0$ nicht mehr genügend klein ist (also eine stark lokalisierte Anfangsverteilung mit einem breiten Frequenzspektrum vorliegt), reicht die obige Entwicklung nicht mehr aus, man muß z.B. noch ein Glied weiter entwickeln:

$$\omega(k) = \omega_0 + \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}(k_0) \cdot (k - k_0) + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2\omega}{\mathrm{d}k^2}(k_0) \cdot (k - k_0)^2 + \cdots .$$

Hieraus ergibt sich, daß die Welle zu späteren Zeitpunkten „zerflossen“ ist, aus der recht scharfen Anfangsverteilung wird mit der Zeit eine breite, flache Welle.

4.2.3 Allgemeine Lösung der homogenen Wellenleichung

Bisher wurde nur die eingeschränkte Lösung der Wellengleichung (eingeschränkt auf Ausbreitung in einer Richtung) betrachtet. Die allgemeine Lösung der Wellengleichung $\Box\psi = 0$ lautet:

$$\psi(\vec{x},t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \left\{ a_-(\vec{k}) \cdot e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} + a_+ \cdot e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}+\omega t)} \right\} \mathrm{d}^3 k, \tag{4.49}$$

mit allgemeinen Anfangsbedingungen

$$\psi(\vec{x},0) =: u(\vec{x}), \qquad \left.\frac{\partial\psi(\vec{x},t)}{\partial t}\right|_{t=0} =: v(\vec{x}). \tag{4.50}$$

Diese Anfangsbedingungen nennt man Cauchy-Daten. Setzt man jetzt zur Zeit $t = 0$ die Cauchy-Daten in (4.49) ein, erhält man

$$u(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \left\{ a_-(\vec{k}) + a_+(\vec{k}) \right\} \cdot e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \, \mathrm{d}^3 k \tag{4.51}$$

$$v(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \left\{ -i\omega a_-(\vec{k}) + i\omega a_+(\vec{k}) \right\} \cdot e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \, \mathrm{d}^3 k. \tag{4.52}$$

Aus diesen beiden Gleichungen kann man die Spektralfunktionen a_- und a_+ erhalten, indem man zuerst jeweils eine Fouriertransformation durchführt und das so erhaltene Gleichungsystem auflöst.

4.2.4 Kugelwellen

Es wird eine kugelsymmetrische Lösung der Wellengleichung

$$\Box\psi = 0, \qquad \psi(\vec{x},t) = \psi(r,t), \quad r = |\vec{x}|$$

gesucht. Den Laplace-Operator, der im d'Alembert-Operator steht, benötigt man in Kugelkoordinaten, wobei der Winkelanteil aufgrund der geforderten Kugelsymmetrie wegfällt. Somit erhält man unter Verwendung der Identität

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(r\psi)$$

für die Wellengleichung

$$\rightsquigarrow \Box\psi = 0 \Longleftrightarrow \frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\psi) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t}(r\psi). \tag{4.53}$$

Die monochromatische Lösung dieser Gleichung lautet für $r \neq 0$ (!):

$$\psi(r,t) = \frac{1}{r} \cdot e^{i(kr\mp\omega t)}. \tag{4.54}$$

Mit $k^2 = \omega^2/c^2$ bzw. $k = \omega/c$, wenn man die positive Wurzel nimmt.

Flächen konstanter Phase

Flächen konstanter Phase sind wiederum gegeben für festes t durch die Bedingung, daß der Exponent konstant sein soll:

$$kr - \omega t = const \quad \text{bzw.} \quad kr + \omega t = const.$$

Man spricht im Fall des $-$ bzw. $+$ von einer auslaufenden bzw. einlaufenden Kugelwelle, welche sich radial nach außen bzw. innen ausbreitet.

Die zugehörigen E- und B-Wellen haben die Form

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_0 \cdot \frac{1}{r} \cdot e^{i(kr \pm \omega t)} \\ \vec{B} &= \vec{B}_0 \cdot \frac{1}{r} \cdot e^{i(kr \pm \omega t)} \end{aligned}$$

Es handelt sich wieder um eine transversale Welle, d.h. $\vec{B}$, $\vec{E}$ und $\vec{k}$ stehen orthogonal aufeinander.

Das weitere Vorgehen (Überlagerung zu Wellenpaketen, etc.) läuft wie bei den „eindimensionalen“ Wellen ab.

4.2.5 Elektromagnetische Wellen in Leitern

Es sei der einfachste Fall, der neutrale, homogene und isotrope Leiter, vorgegeben. Dann erhält man zusätzlich zu den Maxwell-Gleichungen noch das Ohmsche Gesetz (4.8) welchem die Welle in Leitern genügen muß. Die Maxwell-Gleichungen haben die Form:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$nab \cdot \vec{E} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu\mu_0 \vec{j} + \mu\mu_0 \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \overset{(4.8)}{=} \mu\mu_0 \sigma \vec{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{4.55}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \tag{4.56}$$

Wendet man auf (4.55) die Rotation an und leitet (4.56) partiell nach der Zeit ab, ergeben sich die Wellengleichungen zu

$$\Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} - \mu\mu_0 \sigma \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \tag{4.57}$$

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu\mu_0 \sigma \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0, \tag{4.58}$$

welche vom Typ der „Telegraphengleichung“

$$\Box\psi - \mu\mu_0\sigma\frac{\partial\psi}{\partial t} = 0$$

sind. Die monochromatische Lösung dieser Gleichung lautet für die E-Welle:

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{\mathcal{E}}(\vec{x}) \cdot e^{-i\omega t}.$$

mit dem $\vec{\mathcal{E}}$ aus (4.34). Setzt man diesen Ansatz in die Telegraphengleichung ein, erhält man eine Dgl. für $\vec{\mathcal{E}}$:

$$\Bigg(\Delta + \underbrace{\frac{\omega^2}{c^2} + i\omega\mu\mu_0\sigma}_{=:\frac{\omega^2}{c_0^2}\bar{\varepsilon}\mu}\Bigg)\vec{\mathcal{E}}(\vec{x}) = 0, \tag{4.59}$$

mit der komplexen Dielektrizitätskonstante

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon + i\sigma/\omega\varepsilon_0,$$

aus der sich ein komplexer Brechungsindex ergibt

$$\bar{n}^2 = \bar{\varepsilon} \cdot \mu,$$

mit dessen Hilfe man die Berechung der Welleneigenschaften in Leitern formal analog den Rechnungen in nichtleitenden Medien durchführen kann.

Den Real- und den Imaginärteil des Brechungsindexes kann man berechnen, wenn man

$$\bar{n}^2 = (n_r + i\gamma)^2 = \mu(\varepsilon + i(\sigma/\varepsilon_0\omega))$$

setzt und diese quadatische Gleichung nach Real- und Imaginärteil trennt und nach n_r und γ auflöst. Man erhält

$$n_r^2 = \frac{1}{2}\varepsilon\mu\left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0\omega}\right)^2}\right) \tag{4.60}$$

$$\gamma^2 = \frac{1}{2}\varepsilon\mu\left(-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0\omega}\right)^2}\right). \tag{4.61}$$

Durch Einsetzen des komplexen Brechungsindexes erhält man aus (4.59)

$$\left(\Delta + \frac{\omega^2}{\varepsilon_0^2}\bar{n}^2\right)\vec{\mathcal{E}} = 0,$$

was wieder einer „normalen“ Wellengleichung enstpricht, welche mit dem Ansatz

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{x}) = \vec{E}_0 \cdot e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$$

und der daraus folgenden Bedingung

$$\rightsquigarrow k^2 = \left(\frac{\omega}{c_0}\right)^2 \bar{n}^2$$

gelöst wird. Diese Lösung sieht formal aus wie im Fall der Nichtleiter, nur steht an Stelle des „normalen“ Brechungsindexes der komplexe. Um die Folgen dieser Tatsache etwas besser einsehen zu können, nimmt man o.B.d.A. an, daß sich die Welle in z-Richtung ausbreitet:

$$\begin{aligned} \vec{k} &= k \cdot \hat{e}_z; \qquad k = \frac{\omega}{c_0}\bar{n} = \frac{\omega}{c_0}(n_r + i\gamma) \\ \rightsquigarrow \vec{E}(\vec{x},t) &= \vec{E}_0 e^{i\left(i\gamma\frac{\omega}{c_0}\right)z} e^{i\left(\frac{\omega}{c_0}n_r^2 z - \omega t\right)} \\ &= \underbrace{\vec{E}_0 \cdot e^{-\gamma\frac{\omega}{c_0}z}}_{\text{Dämpfung}} \cdot e^{i\left(\frac{\omega}{c_0}n_r^2 z - \omega t\right)}. \end{aligned}$$

Man kann also erkennen, daß eine Welle in Leitern wegen des vorderen e-Faktors, der einen reellen, fallenden Exponent besitzt, gedämpft wird.
Analoge Beziehungen ergeben sich wieder für das B-Feld.

Die oben gefundenen Wellen $\vec{E}$ und $\vec{B}$ müssen natürlich wieder die Maxwell-Gleichungen erfüllen:

$$\left.\begin{aligned} \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0 \rightsquigarrow \hat{e}_z \cdot \vec{E} = 0 \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \rightsquigarrow \hat{e}_z \cdot \vec{B} = 0 \end{aligned}\right\} \vec{E}, \vec{B} \perp \vec{k} \quad \text{Transversalität}, \tag{4.62}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \rightsquigarrow \vec{B} = \frac{\bar{n}}{c_0}\cdot\hat{e}_z \times \vec{E}. \tag{4.63}$$

Es ergeben sich also zum Nichtleiter analoge Beziehungen, außer, daß der Brechungsindex hier komplex ist, was zur Folge hat, daß E- und B-Welle um den Winkel $\varphi = \arctan(\gamma/n_r)$ phasenverschoben sind.

Ist als Spezialfall ein idealer Leiter (Leitfähigkeit $\sigma \to \infty$ gegeben, so folgt aus (4.61), daß der Imaginärteil des Brechungsindexes unendlich groß wird, woraus folgt, daß im Inneren eines idealen Leiters sowohl die E-Welle, als auch die B-Welle verschwindet. Ideale Leiter sind also abgeschirmt!

Betrachtet man die Grenzfläche zwischem einem idealen Leiter und einem Nichtleiter, so ergeben sich aus den Maxwell-Gleichungen (gemäß den Überlegungen aus Abschn. (2.1.1)) die Stetigkeitsbedingungen

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}\times\vec{E} &= -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \rightsquigarrow \vec{E}_\parallel = 0, \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B} &= 0 \rightsquigarrow \vec{B}_\perp = 0. \end{aligned}$$

4.3 Elektromagn. Potentiale, Eichtransformationen

Man kann die Maxwell-Gleichungen prinzipiell in zwei Gruppen aufspalten:

1. Die homogenen Maxwell-Gleichungen enthalten keine Strom- oder Ladungsinhomogenitäten:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \tag{4.64}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0. \tag{4.65}$$

   Aus (4.64) folgt wieder (wie in der Magnetostatik) die Existenz eines Vektorpotentials $\vec{A}$ mit

$$\boxed{\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}}. \tag{4.66}$$

   Setzt man dies in (4.65) ein, folgt

$$\begin{aligned} &\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0 \\ &\rightsquigarrow \vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = 0 \rightsquigarrow \boxed{-\vec{\nabla}\phi(\vec{x}, t) = \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}. \end{aligned} \tag{4.67}$$

   Das skalare Potential ϕ hat also ein gegenüber der Elektrostatik leicht verändertes Aussehen. Löst man die letzte Gleichung nach $\vec{E}$ auf, erhält man

$$\boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}. \tag{4.68}$$

2. Die inhomogenen Maxwell-Gleichungen enthalten im Gegensatz zu den Gleichungen unter Punkt 1 noch den Strom und die Ladungsdichte als Inhomogenität. Sie lauten, wenn man sich auf lineare, isotrope Medien beschränkt:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon\varepsilon_0}, \tag{4.69}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu\mu_0\vec{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \qquad c^2 = \frac{c_0^2}{\varepsilon\mu}. \tag{4.70}$$

   Setzt man die oben gefundenen Potentiale in Gleichung (4.69) ein, ergibt sich

$$\vec{\nabla}\left(-\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = \frac{\varrho}{\varepsilon\varepsilon_0} \rightsquigarrow \boxed{\Delta\phi + \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = -\frac{\varrho}{\varepsilon\varepsilon_0}}. \tag{4.71}$$

Diese Gleichung geht im statischen Fall in die Poisson-Gleichung (2.5) über. Setzt man die Potentiale in (4.70) ein, folgt

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \mu\mu_0 \vec{j} - \frac{1}{c^2}\left(\vec{\nabla}\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}\right)$$

$$\rightsquigarrow \Delta A - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) = -\mu\mu_0 \vec{j},$$

Dabei wurde $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = -\Delta\vec{A} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})$ benutzt. Diese letzte Gleichung kann man unter Benutzung des d'Alembert-Operators umschreiben in

$$\boxed{\Box\vec{A} - \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) = -\mu\mu_0\, \vec{j}}. \tag{4.72}$$

Der geschulte Blick sieht sofort, daß die E- und B-Felder unter den folgenden Transformationen invariant bleiben:

$$\vec{A} \to \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\lambda \tag{4.73}$$

$$\phi \to \phi' = \phi - \frac{\partial\lambda}{\partial t}. \tag{4.74}$$

Die Funktion λ nennt man „Eichfunktion“, die so definierte Klasse von Transformationen nennt man „Eichtransformationen“. Die Aussage, daß die Felder invariant unter diesen Transformationen bleiben, kann man durch Einsetzen leicht zeigen:

$$\begin{aligned}\vec{B}' &= \vec{\nabla}\times\vec{A}' = \vec{\nabla}\times\vec{A} + \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\lambda) = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \vec{B}\\ \vec{E}' &= -\frac{\partial\vec{A}'}{\partial t} - \vec{\nabla}\phi' = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\phi - \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\lambda) + \vec{\nabla}\frac{\partial\lambda}{\partial t} = \vec{E}.\end{aligned}$$

Man hat also in der Wahl der Potentiale $\vec{A}$ und ϕ eine gewisse Freiheit, die man dahingehend ausnutzen kann, die Gleichungen (4.71) und (4.72) zu entkoppeln. In der Praxis haben sich zwei Eichbedingungen durchgesetzt, die gerade diese Entkopplung beinhalten:

1. Die „Coulomb-Eichung“, welche wie in der Magnetostatik durch

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0 \tag{4.75}$$

festgelegt wird. Mittels dieser Eichung geht (4.71) über in die Poisson-Gleichung (2.5), welche die Lösung (2.7) (mit Zeitabhängigkeit) hat:

$$(4.71) \longrightarrow \Delta\phi = -\frac{\varrho}{\varepsilon\varepsilon_0} \rightsquigarrow \phi(\vec{x},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\int \frac{\varrho(\vec{x}',t)}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\,\mathrm{d}^3x'. \tag{4.76}$$

Diese Lösung ist das „instantane“ Coulomb-Potential der Ladungsverteilung $\varrho(\vec{x},t)$. Das bedeutet, daß sich jede Änderung der Ladungsdichte *sofort* auf das Potential auswirkt. Daran kann man erkennen, daß dieses Coulomb-Potential im Gegensatz zur Elektrostatik keine physikalische Bedeutung haben kann, da auch sehr weit entfernte Ladungen sofort zur Änderung des Potentials beitragen, was aber wegen der (durchaus endlichen) Ausbreitungsgeschwindigkeit von Informationen (der Lichtgeschwindigkeit in diesem Fall) nicht sein kann.

Unter Verwendung der Coulomb-Eichung ist also die Gleichung für ϕ entkoppelt. Damit kann man ϕ bestimmen und daraus dann das Vektorpotential $\vec{A}$ aus Gl. (4.72) (wenn man dort $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ einsetzt) bestimmen. Eine besonders einfache Gestalt nehmen unter der Coulomb-Eichung die Gl. (4.71) und (4.72) an, wenn man freie Wellen beschreiben will:

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= 0 \qquad \text{einfachste Lösung } \phi = 0 \\ \rightsquigarrow \Box\vec{A} &= 0 \qquad \text{Wellenfunktion f. } \vec{A}. \end{aligned}$$

In diesem Fall sind $\vec{E}$ und $\vec{B}$ *allein* durch das Vektorpotential $\vec{A}$ bestimmt, woraus sich (wegen der Einschränkung $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$) zwei Freiheitsgrade ergeben, die den beiden Polarisationsrichtungen entsprechen. Man hat also ohne große Rechnerei (im Gegensatz zu den Anfängen von 4.2) dieselben Ergebnisse erhalten. Aus diesem Grund nennt man die Coulomb-Eichung auch „Strahlungs-Eichung“.

Aus der Eindeutigkeitsforderung für das Vektorpotential ergibt sich eine Bedingung, der eine Eichfunktion λ genügen muß. Man gibt sich zwei (nicht trivial) unterschiedliche Vektorpotentiale $\vec{A}$, $\vec{A}'$ vor, die beide coulomb-geeicht sein sollen, dann erhält man

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\lambda \rightsquigarrow \boxed{\Delta\lambda = 0}. \tag{4.77}$$

Jedes λ, daß dieser Bedingung genügt, ist wiederum eine Eichfunktion. Aus diesem Grund, daß die Coulomb-Eichung immer noch nicht eindeutig ist, spricht man von einer „Eichklasse“ der Coulomb-Eichungen.

Wie bereits in Abschn. 3.1 gezeigt, ist eine Coulomb-Eichung immer möglich. Hat man ein nicht coulomb-geeichtes Vektorpotential gegeben, dann ist

$$\begin{aligned} &\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \chi(\vec{x}, t) \neq 0 \\ &\rightsquigarrow \vec{A} \to \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\lambda \qquad \text{mit } \vec{\nabla} \cdot \vec{A}' = 0 \\ &\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\lambda) = 0 \rightsquigarrow \boxed{\Delta\lambda = -\chi(\vec{x}, t)} \\ &\rightsquigarrow \lambda(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\chi(\vec{x}', t)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \, \mathrm{d}^3x'. \end{aligned}$$

Das Problem der Coulomb-Eichung besteht darin, daß sie *nicht* lorentz-invariant ist, was jedoch die folgende Eichtransformation erfüllt:

2. Die Lorentz-Eichung. Man fordert:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0, \tag{4.78}$$

womit sich aus den Feldgleichungen (4.71) und (4.72) folgende Gleichungen ergeben:

$$\Delta \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\varrho}{\varepsilon \varepsilon_0} \tag{4.79}$$

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \mu_0 \vec{j}. \tag{4.80}$$

Diese beiden Gleichungen entsprechen inhomogenen Wellengleichungen für ϕ und für $\vec{A}$. Sie sind „symmetrisch“ und außerdem lorentz-invariant.

Somit sind aus den sechs Differentialgleichungen (4.71) und (4.72) nur noch vier übrig geblieben, die sogar „symmetrisch“ sind. Sie sind vom Typ

$$\Box \psi = -f(\vec{x}, t), \qquad \text{f. } \psi = \phi, A_i, \tag{4.81}$$

mit gegebener Inhomogenität $f(\vec{x}, t)$.

Ebenso wie die Coulomb-Eichung kann man die Lorentz-Eichung immer durchführen. Für beliebige $\vec{A}$ und ϕ ist z.B.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \chi(\vec{x}, t) \neq 0.$$

Dann folgt aus

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \lambda, \qquad \phi' = \phi - \frac{\partial \lambda}{\partial t}$$

mit $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' + 1/c^2 (\partial \phi' / \partial t) = 0$ durch Einsetzen

$$\boxed{\rightsquigarrow \Box \lambda = -\chi(\vec{x}, t)}. \tag{4.82}$$

Die Lorentz-Eichung ist (ebenfalls wie die Coulomb-Eichung) nicht eindeutig, denn jedes $\lambda' = \lambda + \lambda_0$ mit $\Box \lambda_0 = 0$ ist wiederum eine Eichfunktion, wodurch eine Eichklasse (die der Lorentz-Eichung) entstanden ist.

Ein wichtiger Punkt ist, daß diese Eichtransformationen mathematische die (unitäre) Gruppe $U(1)$ bilden, die sog. „Symmetrie-Gruppe“. Die Elektrodynamik, vor allem die Maxwell-Gleichungen sind invariant unter diesen Eichtransformationen. Aus dieser (inneren, d.h. nicht Raum-Zeit-) *Symmetrie der Elektrodynamik* folgt laut Noethertheorem eine Erhaltungsgröße, in diesem Fall die *Ladungserhaltung*.

4.4 Lösung der inhomogenen Wellengleichung

In diesem Abschnitt wird eine Lösung der Gleichung (4.81) gesucht:

$$(4.81): \qquad \Box\psi(\vec{x},t) = -f(\vec{x},t). \tag{4.83}$$

Die allgemeine Lösung einer Dgl. ergibt sich aus der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung $\psi_0(\vec{x},t)$ und einer partikulären Lösung der inhomogenen Gleichung $\psi_1(\vec{x},t)$. Die Lösung der homogenen Wellengleichung ist bereits bekannt, es ist die „normale“ Wellenfunktion.

Die partikuläre Lösung wird mit der Methode der Greenschen Funktion bestimmt. Die Greensche Funktion der Wellengleichung $G(\vec{x},\vec{x}',t,t')$ ist definiert durch

$$\Box G(\vec{x},\vec{x}',t,t') = -\delta^3(\vec{x}-\vec{x}')\cdot\delta(t-t'). \tag{4.84}$$

Ist die Greensche Funktion bekannt, so folgt formal sofort die partikuläre Lösung von (4.83):

$$\psi_1(\vec{x},t) = \iint G(\vec{x},\vec{x}',t,t')\cdot f(\vec{x}',t')\,\mathrm{d}t'\,\mathrm{d}^3x'. \tag{4.85}$$

Dies ist eine sog. „Faltung“, eine Wichtung der Inhomogentiät mit G. Den Beweis, daß ψ_1 (4.83) löst, führt man durch einfaches Einsetzen.

Die Greensche Funktion der Wellengleichung beschreibt (physikalisch) die Ausbreitung einer punktförmigen (Einheits)-Störung, wie man anhand der Definitionsgleichung (4.85) erkennen kann. Die Inhomogenität $f(\vec{x},t)$ kann als (beliebige) Quelle aufgefaßt werden, die Wellenfunktion ψ stellt dann eine Superposition von punktförmigen Quellen dar. Im folgenden wird behandelt, wie man die Greensche Funktion der Wellengleichung findet.

Bestimmung von *G* mittels der Methode der Fouriertransformation

Man setzt G als Fourier-Integral über eine Fouriertransformierte $\tilde{G}$ an:

$$\text{Ansatz:}\quad G(\vec{x},\vec{x}',t,t') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int \tilde{G}(\vec{x},\vec{x}',\omega)\cdot e^{-i\omega(t-t')}\,\mathrm{d}\omega. \tag{4.86}$$

(Das Minuszeichen im Exponenten der e-Funktion steht im Gegensatz zur „üblichen“ Fouriertransformation hier konventionsgemäß, da es sich um eine Zeittransformation handelt.)

Wendet man auf das so definierte G den d'Alembert-Operator an, erhält man

$$\Box G = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\Delta\tilde{G}(\vec{x},\vec{x}',\omega) + \frac{\omega^2}{c^2}\tilde{G}(\vec{x},\vec{x}',\omega)\right)\cdot e^{-i\omega(t-t')}\,\mathrm{d}\omega. \tag{4.87}$$

Schreibt man nun noch die zeitliche δ-Funktion in Gl. (4.84) um in

$$\delta(t-t') \overset{(4.44)}{=} \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t-t')}\,\mathrm{d}\omega$$

und setzt dies alles in (4.87) ein, erhält man

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\Delta\tilde{G}(\vec{x},\vec{x}',\omega)+\frac{\omega^2}{c^2}\tilde{G}(\vec{x},\vec{x}',\omega)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\delta^3(\vec{x}-\vec{x}')\right)\cdot e^{-i\omega(t-t')}\,\mathrm{d}\omega = 0,$$

was auf jeden Fall erfüllt ist, wenn der Integrand verschwindet, wenn also folgendes gilt:

$$\left(\Delta+\frac{\omega^2}{c^2}\right)\tilde{G}(\vec{x},\vec{x}',\omega) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\delta^3(\vec{x}-\vec{x}'). \tag{4.88}$$

Diese Gleichung nennt man (inhomogene) „Helmholtz-Gleichung“. Die Fourier-Transformierte $\tilde{G}$ der gesuchten Greenschen Funktion der Wellengleichung ist also die Greensche Funktion der Helmholtz-Gleichung.

Wie man leicht sieht, ist $\tilde{G}$ durch eine Kugelwelle gegeben (mit Mittelpunkt $\vec{x}'$):

$$\tilde{G}(\vec{x},\vec{x}',\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{4\pi}\frac{e^{\pm ik|\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x}-\vec{x}'|}, \quad k=\omega/c.$$

Im Falle des Minus-/Pluszeichens liegt eine ein-/auslaufende Welle vor (gemäß Abschn. 4.2.4).

Daß dieses $\tilde{G}$ die Helmholtz-Gleichung erfüllt, kann man nachrechnen, wenn man einen Abstandsvektor $\vec{r} := \vec{x}-\vec{x}'$ definiert, $\tilde{G}$ als Produkt zweier $|\vec{r}|$-abhängiger Funktionen auffaßt, und (1.22) beachtet

$$(1.22): \qquad \Delta 1/|\vec{r}| = -4\pi\delta^3(\vec{r}).$$

Setzt man nun das Zwischenergebnis $G(\vec{x},\vec{x}',t,t') = G(\vec{x}-\vec{x}',t-t')$ in (4.86) ein, erhält man

$$\begin{aligned} G(\vec{x}-\vec{x}',t-t') &= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i(\pm k|\vec{x}-\vec{x}'|-\omega(t-t'))}\,\mathrm{d}\omega \\ &= \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t-t'\mp\frac{1}{c}|\vec{x}-\vec{x}'|)}\,\mathrm{d}\omega}_{=\delta(t-t'\mp\frac{1}{c}|\vec{x}-\vec{x}'|)}\,. \end{aligned} \tag{4.89}$$

Je nach Vorzeichen ergeben sich zwei Typen von Green-Funktionen:
dir retardierte und die avancierte Green-Funktion:

$$G_{\text{ret}} = \frac{1}{4\pi}\delta\left(t - t' - \frac{1}{c}|\vec{x} - \vec{x}'|\right) \cdot \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \tag{4.90}$$

$$G_{\text{av}} = \frac{1}{4\pi}\delta\left(t - t' + \frac{1}{c}|\vec{x} - \vec{x}'|\right), \cdot \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \tag{4.91}$$

die ein unterschiedliches raum-zeitliches Ausbreitungsverhalten aufweisen.

Die so erhaltenen Green-Funktion beschreiben die Auswirkung einer Störung am Ort $\vec{x}'$ zur Zeit t' auf den Punkt $\vec{x}$ zur Zeit t, wenn die Zeiten t und t' gerade den Abstand $\Delta t := \frac{1}{c}|\vec{x} - \vec{x}'|$ haben. Dadurch wird sichergestellt, wenn man die Felder bestimmt, daß sich Störungen, also Änderungen des Stroms bzw. der Ladungsdichte, nicht instantan (s. S. 82) auf die Felder auswirken, sondern mit endlicher Geschwindigkeit, der Lichtgeschwindigkeit) ausbreiten.

Dies ist im Falle der retardierten Green-Funktion unmittelbar einsichtig. Die avancierte Green-Funktion scheint jedoch ein „akausales“ Verhalten an den Tag zu legen, beschreibt sie doch die Auswirkung einer Störung, die noch nicht stattgefunden hat, auf einen Punkt $\vec{x}$ zur Zeit t. Dies läßt sich jedoch klären, wenn man von ein- bzw. auslaufenden Kugelwellen, die die Störung nach sich zieht ausgeht. Im Falle der auslaufenden Kugelwelle hat man die retardierte, im Falle der einlaufenden Kugelwelle die avancierte Green-Funktion zu betrachten, was gerade obigen Mißstand erklärt, den bei einer einlaufenden Welle ist tatsächlich die Auswirkung (die Welle) vor der Störung vorhanden, da sich sozusagen die Minuszeichen herausheben.

Um Mißverständisse zu vermeiden wird in der Physik jedoch fast ausschließlich die retardierte Green-Funktion betrachtet, obwohl beide Funktionen mit der entsprechend gearteten Welle mathematisch völlig äquivalent sind. Man setzt daher $G = G_{\text{ret}}$, wenn man physikalische Abstrahlungen betrachtet.

Die Lösung der inhomogenen Wellengleichung (4.83) ergibt sich nun durch einfache Integration (s. (4.85)):

$$\begin{aligned} \psi_{\text{ret}}(\vec{x}, t) &= \iint G_{\text{ret}}(\vec{x} - \vec{x}', t - t') f(\vec{x}', t')\, \mathrm{d}t'\, \mathrm{d}^3x' \\ &= \frac{1}{4\pi}\iint \delta\left(t - t' - \frac{1}{c}|\vec{x} - \vec{x}'|\right) \cdot \frac{f(\vec{x}', t')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}\, \mathrm{d}t'\, \mathrm{d}^3x' \\ &= \frac{1}{4\pi}\int \frac{f(\vec{x}, t - \frac{1}{c}|\vec{x} - \vec{x}'|)}{|\vec{x} - \vec{x}'|}\, \mathrm{d}^3x' \qquad \text{retardierte Lösung.} \end{aligned} \tag{4.92}$$

Entsprechend erhält man eine avancierte Lösung zu

$$\psi_{\text{av}}(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{f(\vec{x}, t + \frac{1}{c}|\vec{x} - \vec{x}'|)}{|\vec{x} - \vec{x}'|}\, \mathrm{d}^3x'. \tag{4.93}$$

Wenn nun die Ladungsdichte $\varrho(\vec{x},t)$, die Stromdichte $\vec{j}(\vec{x},t)$ überall vorgegeben ist, kann man die Strahlungsfelder dieser Quellen berechnen. Setzt man noch $t_{\text{ret}} = t - \frac{1}{c}|\vec{x}-\vec{x}'|$, so erhält man die retardierten Potentiale aus:

$$\begin{aligned}
\phi_{\text{ret}}(\vec{x},t) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\int \frac{\varrho(\vec{x}',t_{\text{ret}})}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\,\mathrm{d}^3x' \\
\vec{A}_{\text{ret}}(\vec{x},t) &= \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{j}(\vec{x}',t_{\text{ret}})}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\,\mathrm{d}^3x'. \qquad (4.94)
\end{aligned}$$

Ausschlaggebend für diese Potentiale ist, wie bereits beschrieben, die Ladungsdichte bzw. der Strom zu einem *früheren* Zeitpunkt. Die Potentiale hängen nicht mehr instantan von diesen Größen ab. Ersetzt man in den obigen Gln. t_{ret} durch t_{av}, erhält man die avancierten Potentiale.

4.5 Abstrahlung einer lokalisierten Quelle

Es sei ein Gebiet vorgegeben, in dem sowohl die Ladungsdichte ϱ, als auch die Stromdichte $\vec{j}$ von Null verschieden sind. d sei der maximale Durchmesser dieses Gebietes. Außerhalb befinde sich Vakuum, d.h. $\varepsilon = \mu = 1$, $c = c_0 = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ und $\varrho = 0, \vec{j} = 0$.

Die Ladungs- und Stromdichten innerhalb des obigen Gebietes können als Fourier-Entwicklung dargestellt werden

$$\begin{aligned}
\varrho(\vec{x},t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \varrho_\omega(\vec{x})\cdot e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}\omega, \\
\vec{j}(\vec{x},t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \vec{j}_\omega(\vec{x})\cdot e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}\omega.
\end{aligned}$$

Gesucht sind die Strahlungsfelder außerhalb des Quellengebietes. Im folgenden werden nur feste Frequenzen betrachtet, die Indizierung mit ω entfällt daher. Weiterhin werden nur harmonische oszillierende Quellen betrachtet, also

$$\varrho(\vec{x},t) = \varrho(\vec{x})\cdot e^{-i\omega t} \qquad (4.95)$$

$$\vec{j}(\vec{x},t) = \vec{j}(\vec{x})\cdot e^{-i\omega t}. \qquad (4.96)$$

Gemäß Gl. (4.94) folgen daraus die retardierten Potential zu

$$\phi(\vec{x},t) = \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\varrho(\vec{x}')\cdot e^{i\frac{\omega}{c}|\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\,\mathrm{d}^3x'}_{=\phi(\vec{x})}\cdot e^{-i\omega t} \tag{4.97}$$

$$\vec{A}(\vec{x},t) = \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{j}(\vec{x}')\cdot e^{i\frac{\omega}{c}|\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\,\mathrm{d}^3x'}_{=\vec{A}(\vec{x})}\cdot e^{-i\omega t}. \tag{4.98}$$

Die Feldstärke außerhalb der Quelle ergibt sich damit zu

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{x},t) = \left(\vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{x})\right)\cdot e^{-i\omega t}. \tag{4.99}$$

Das E-Feld erhält man aus einer Maxwell-Gleichung:

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{c^2}(-i\omega)\vec{E}$$

$$\rightsquigarrow \vec{E} = \frac{ic^2}{\omega}(\vec{\nabla}\times\vec{B}) = i\frac{c^2}{\omega}\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{x}))\cdot e^{-i\omega t}. \tag{4.100}$$

Man sieht, daß die E- und die B-Felder allein durch das Vektorpotential $\vec{A}$ bestimmt sind.

Näherung für $|\vec{x}-\vec{x}'| \gg d$

Für das Fernfeld, also für große Abstände vom Quellengebiet soll das (Vektor)-Potential, wie schon in einigen Abschnitten zuvor, entwickelt werden, um Aufschlüsse über die „Physik, die in den Feldern steckt“ zu erhalten. Ein weitere Grund für diese Entwicklung ist die evtl. leichtere Berechnung des Integrals (4.98).

Sei γ der Winkel zwischen $\vec{x}$ und $\vec{x}'$, $r=|\vec{x}|$, $r'=|\vec{x}'|<d$ und $\widehat{n}=\vec{x}/|\vec{x}|$. Es gilt also $r\gg r'$, es wird also nur das Fernfeld des Quellengebietes betrachtet. Mit obigen Bezeichnungen erhält man

$$\begin{aligned}|\vec{x}-\vec{x}'| &= \sqrt{r^2+r'^2+2rr'\cos\gamma} = r\sqrt{1+\left(\frac{r'}{r}\right)^2-2\frac{r'}{r}\cos\gamma}\\ &\approx r\left[1-\frac{r'}{r}\cos\gamma+O\left(\left(\frac{r'}{r}\right)^2\right)\right] = r-r'\cos\gamma = r-\widehat{n}\cdot\vec{x}'.\end{aligned}$$

Mit dem so entwickelten Abstand wird

$$\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\approx\frac{1}{r}\left(1+\frac{\widehat{n}\cdot\vec{x}'}{r}\right).$$

Setzt man jetzt wieder $k = \omega/c$ $(= 2\pi/\lambda)$, so kann man den Exponenten der e-Funktion im Vektorpotential in Gl. (4.98) umschreiben

$$\rightsquigarrow e^{ik|\vec{x}-\vec{x}'|} \approx e^{ikr} \cdot e^{-ik(\widehat{n}\cdot\vec{x}')}. \tag{4.101}$$

Da sich mit all diesen Näherungen Gl. (4.98) noch immer nicht „besonders einfach“ berechnen läßt, entwickelt man (4.101) fröhlich weiter. Nimmt man $k(\widehat{n}\cdot\vec{x}') \ll 1$ an, was für $k \cdot d \ll 1$ erfüllt ist (also für Wellenlängen λ, die groß gegen den maximalen Durchmesser des Quellengebietes sind), kann man die e-Funktion entwickeln:

$$k(\widehat{n}\cdot\vec{x}) \ll 1 \rightsquigarrow e^{-ik(\widehat{n}\cdot\vec{x}')} \approx 1 - ik(\widehat{n}\cdot\vec{x}') + O\left((k\widehat{n}\cdot\vec{x}')^2\right).$$

Damit kann man den Bruch in (4.98) umschreiben in

$$\begin{aligned} \frac{e^{ik|\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x}-\vec{x}'|} &\approx \frac{e^{ikr}}{r}\left(1 + \frac{\widehat{n}\cdot\vec{x}'}{r} - ik(\widehat{n}\cdot\vec{x}') + \cdots\right) \\ &= \frac{e^{ikr}}{r}\left(1 + \left(\frac{1}{r} - ik\right)\cdot\widehat{n}\cdot\vec{x}'\right), \end{aligned}$$

womit sich dann endlich das Vektorpotential wie folgt ergibt

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow \vec{A}(\vec{x},t) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}\int\left[1 + \left(\frac{1}{r} - ik\right)\cdot\widehat{n}\cdot\vec{x}'\right]\cdot\vec{j}(\vec{x}')\,\mathrm{d}^3x' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}\Bigg\{\underbrace{\int\vec{j}(\vec{x}')\,\mathrm{d}^3x'}_{\substack{\text{elektrische}\\\text{Dipolstrahlung}}} \\ &\quad + \underbrace{\left(\frac{1}{r} - ik\right)\int(\widehat{n}\cdot\vec{x}')\cdot\vec{j}(\vec{x}')\,\mathrm{d}^3x'}_{\substack{\text{enthält magnetische Dipolstrahlung}\\\text{und elektrische Quadrupolstrahlung}}}\Bigg\}. \end{aligned} \tag{4.102}$$

Das erste Integral (die elektrische Dipolstrahlung) ist (sofern von Null verschieden) der dominierende Faktor der Entwicklung.

Elektrische Dipolstrahlung

Betrachtet werden in (4.102) nur die elektrischen Dipole:

$$\rightsquigarrow \vec{A}(\vec{x},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}\int\vec{j}(\vec{x}')\,\mathrm{d}^3x'.$$

Der Strom in obiger Gleichung muß die Kontinuitätsgleichung (1.5) erfüllen:

$$\begin{aligned} (1.5):\qquad & \vec{\nabla}\cdot\vec{j}(\vec{x},t) = -\frac{\partial\varrho(\vec{x},t)}{\partial t} \\ & \overset{(4.96)}{\iff} [\vec{\nabla}\cdot\vec{j}(\vec{x})]\cdot e^{-i\omega t} = i\omega\varrho(\vec{x})\cdot e^{-i\omega t} \\ & \iff \boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{j}(\vec{x}) = i\omega\varrho(\vec{x})}. \end{aligned}$$

Man wendet nun (wie in Abschn. 3.2) folgende Umformung an

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}(x_k \cdot \vec{j}) &= \underbrace{(\vec{\nabla} x_k) \cdot \vec{j}}_{=j_k} + x_k(\vec{\nabla} \cdot \vec{j}) \\
\rightsquigarrow \int j_k(\vec{x}')\, \mathrm{d}^3x' &= -\int x_k(\vec{\nabla} \cdot \vec{j})\, \mathrm{d}^3x' + \underbrace{\int \vec{\nabla}(x_k \cdot \vec{j}(\vec{x}'))\, \mathrm{d}^3x'}_{\overset{(1.15)}{=} \int (x_k \cdot \vec{j}) \cdot \mathrm{d}\vec{o} = 0} .
\end{aligned}$$

Der hintere Term verschwindet, da das Quellengebiet begrenzt ist. Legt man nämlich Integrationsvolumen komplett um das Quellengebiet, so ist die Stromdichte auf der Oberfläche =0, was bedeutet, daß das Oberflächenintegral verschwindet.

Da man die obige Operation für jede Komponente wiederholen kann, ergibt sich

$$\rightsquigarrow \quad \int \vec{j}(\vec{x}')\, \mathrm{d}^3x' = -i\omega \underbrace{\int \vec{x}' \cdot \varrho(\vec{x}')\, \mathrm{d}^3x'}_{\overset{(2.54)}{=} \vec{p}(\vec{x}) = const}$$

$$\rightsquigarrow \quad \vec{A}(\vec{x}, t) = \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \cdot (-i\omega)\vec{p}}_{=\vec{A}(\vec{x})} \cdot e^{-i\omega t}. \tag{4.103}$$

Berechnung der Feldstärken

Aus Gl. (4.103) erhält man das B-Feld durch Bilden der Rotation des Vektorpontials $\vec{A}$. Man beachte, daß das Vektorpotential folgende Struktur hat: $\vec{A}(\vec{x}) = \varphi(r) \cdot \vec{p}$.
Nach einiger Rechnerei (s. auch Nolting S. 338 ff.) unter Anwendung der folgenden Formeln (s. auch A.2)

$$\begin{gathered}
\vec{\nabla} \times (\varphi \cdot \vec{a}) = \varphi(\vec{\nabla} \times \vec{a}) + (\vec{\nabla}\varphi) \times \vec{a} \\
\rightsquigarrow \vec{\nabla} \times \vec{A} = (\vec{\nabla}\varphi) \times \vec{p} = (\widehat{n} \times \vec{p})\tfrac{\partial \varphi}{\partial r}, \qquad \vec{\nabla}\varphi(r) = \widehat{n}\tfrac{\partial \varphi}{\partial r}
\end{gathered}$$

($\widehat{n}$: Einheitsvektor in $\vec{x}$-Richung) kommt man zu dem Ergebnis

$$\boxed{\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot c \cdot k^2 \cdot \frac{e^{ikr}}{r} \left(1 - \frac{1}{ikr}\right) (\widehat{n} \times \vec{p})}. \tag{4.104}$$

Man sieht, daß (wie in (4.99) beschrieben) das B-Feld aus einer ortsabhängigen und einer zeitlich oszillierenden Größe aufgebaut ist.

Das elektrische Feld besitzt nach (4.100) dieselbe Zeitabhängigkeit. Die die Ortsabhängigkeit ergibt sich zu

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{x}) &= \frac{i\,c^2}{\omega}\,\vec{\nabla}\times\vec{B}(\vec{x}) = ikc\frac{\mu_0}{4\pi}\,\vec{\nabla}\times\big[\psi(r)(\widehat{n}\times\vec{p})\big],\\ &\quad \text{mit } \psi(r) = \frac{e^{ikr}}{r}\left(1-\frac{1}{ikr}\right).\end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung erhält man unter Anwendung folgender Schritte

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\times(\widehat{n}\times\vec{p}) &= (\vec{p}\cdot\vec{\nabla})\widehat{n}\underbrace{-(\widehat{n}\cdot\vec{\nabla})\vec{p}+\widehat{n}(\vec{\nabla}\cdot\vec{p})}_{=0}-\vec{p}(\vec{\nabla}\cdot\widehat{n})\\ &= \frac{1}{r}\cdot[\vec{p}-\widehat{n}(\widehat{n}\cdot\vec{p})]-\frac{2}{r}\cdot\vec{p},\\ \vec{\nabla}\times\big[\psi(r)(\widehat{n}\times\vec{p})\big] &= \psi(r)\cdot\vec{\nabla}\times(\widehat{n}\times\vec{p})+\underbrace{\vec{\nabla}\psi}_{=\widehat{n}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial r}}(\widehat{n}\times\psi),\\ \widehat{n}\times(\widehat{n}\times\vec{p}) &= \widehat{n}(\widehat{n}\cdot\vec{p})-\vec{p}\qquad(\text{da } \widehat{n}^2=1)\end{aligned}$$

das „schöne“ Ergebnis

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}k^2\frac{e^{ikr}}{r}\left\{(\widehat{n}\times\vec{p})\times\widehat{n}+\frac{1}{kr}\left(i-\frac{1}{kr}\right)\big[\vec{p}-3\widehat{n}\big(\vec{p}\cdot\widehat{n}\big)\big]\right\}. \tag{4.105}$$

Bezüglich dem Abstand r von der Quelle hat man zwei wichtige Fälle zu diskutieren, die Abstrahlung in den „Fern-“ und in die „Nahzone“:

Fernzone

Um die oben erhaltenen Gleichungen für die Felder besser interpretieren zu können, führt man eine weitere Vereinfachung ein (zusätzlich zu denen, die bereits zur Ableitung der Gleichungen getroffen wurden). Man betrachtet die Felder in großer Entfernung von den Quellen. Dort gilt

$$kr \gg 1 \rightsquigarrow \quad r \gg \frac{1}{k} \sim \lambda.$$

Weiterhin muß aber die Grundvoraussetzung $\lambda \gg d$ gelten, insgesamt gilt also

$$r \gg \lambda \gg d \rightsquigarrow \frac{1}{kr}, \frac{1}{(kr)^2} \text{ vernachlässigbar.}$$

Führt man die Entwicklung nach $1/kr$ durch, erhält man für die Felder

$$\vec{B}(\vec{x}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi}ck^2\frac{e^{ikr}}{r}\cdot(\widehat{n}\times\vec{p}) \tag{4.106}$$

$$\vec{E}(\vec{x}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi}c^2k^2\frac{e^{ikr}}{r}\cdot(\widehat{n}\times\vec{p})\times\widehat{n} = c\cdot\vec{B}(\vec{x})\times\widehat{n}. \tag{4.107}$$

Man kann erkennen, daß die E- und die B-Welle wieder senkrecht auf $\widehat{n}$ stehen, also transversal sind. Außerdem stehen sie selbst senkrecht aufeinander, die Vektoren $\vec{E}/|\vec{E}|, \vec{B}/|\vec{B}|, \widehat{n}$ bilden demnach ein normiertes orthogonales Rechtsystem.

Ein weiterer interessanter Punkt, der im folgenden Abschnitt genauer behandelt wird, ist die Tatsache, daß im Fernfeld (also unter den gemachten Näherungen) die Abnahme von E und B proportional zu $1/r$ ist. Sie fällt also langsamer ab, als dies im statischen Fall bei der Coulomb-WW der Fall ist, welche bereits eine sehr lange Reichweite hat (s. Theorie A). Aus diesem Grund erfolgt durch die elektrische Dipolstrahlung eine Energieabstrahlung bis ins Unendliche. Folgerung: ?!

Poynting-Vektor

Der Poynting-Vektor, der die Energiestromdichte der abgestrahlten Welle darstellt, ergibt sich gemäß (4.35) zu

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\Re\left(\vec{E}(\vec{x},t)\right) \times \Re\left(\vec{B}(\vec{x},t)\right) = \vec{S}(t). \tag{4.108}$$

Diese Größe mittelt man über eine Periode $T = 2\pi/\omega$, um die tatsächlich *übertragene* Energiestromdichte zu erhalten, da sich einige „Teile" wieder herausmitteln.

Man führt diese Mittelung wie in Abschnitt 4.2.1 durch und erhält

$$\begin{aligned}
\langle\vec{S}\rangle &= \frac{1}{\mu_0}\cdot\frac{1}{2}\cdot\Re\big(\vec{E}(\vec{x})\times\vec{B}(\vec{x})\big) = \frac{c}{2\mu_0}\cdot\Re\big((\vec{B}\times\widehat{n})\times\vec{B}\big) \\
&= \frac{c}{2\mu_0}\Re\big[\widehat{n}\cdot(\vec{B}\cdot\vec{B}^*) - \vec{B}\cdot\underbrace{\widehat{n}\cdot\vec{B}^*)}_{=0}\big] = \frac{c}{2\mu_0}|\vec{B}(\vec{x})|^2\cdot\widehat{n} \\
&= \widehat{n}\cdot\frac{c}{2\mu_0}\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right)^2\cdot\left(\frac{ck^2}{r}\right)^2\underbrace{|\widehat{n}\times\vec{p}|}_{\overset{\widehat{n}^2=1}{=}p^2\sin\theta} \\
&= \widehat{n}\cdot\frac{c}{32\pi^2\varepsilon_0}\frac{p^2k^4}{r^2}\sin^2\theta.
\end{aligned}$$

Dabei ist $p = |\vec{p}|$ und θ der Winkel zwischen $\widehat{n}$ und $\vec{p}$.

Strahlungsleistung

Aus dem Poynting-Vektor berechnet sich der Energiestrom pro Flächenelement zu

$$\mathrm{d}P = \langle\vec{S}\rangle\cdot\mathrm{d}\vec{o}, \tag{4.109}$$

was gerade der Leistung entspricht, die durch diese Fläche transportiert wird. Das $\mathrm{d}\vec{o}$ kann man umschreiben in Kugelkoordinaten

$$\mathrm{d}\vec{o} = \widehat{n}\,\mathrm{d}o = \widehat{n}r^2 \underbrace{\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi}_{=\mathrm{d}\Omega},$$

womit sich das $\mathrm{d}P$ wie folgt ergibt

$$\mathrm{d}P = \langle\vec{S}\rangle\widehat{n}r^2\,\mathrm{d}\Omega = \frac{c}{32\pi^2\varepsilon_0}p^2k^4\sin^2\theta\,\mathrm{d}\Omega.$$

Damit ergibt sich die Winkelverteilung der Strahlungsleistung zu

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{c}{32\pi^2\varepsilon_0}p^2k^4\sin^2\theta}. \tag{4.110}$$

Anhand dieser Gleichung kann man erkennen, was bereits weiter oben kurz angeschnitten wurde, daß nämlich der Energiefluß in jedem Abstand von der Quelle (wegen der Unabhängigkeit der Strahlungsleistung von r) gleichgroß ist, wodurch der Energiestrom ins Unendliche fließt. Diese Tatsache nennt man „Abstrahlung". Die „Abstrahlung" findet nur dann statt, wenn der Poynting-Vektor für große r proportional zu $1/r^2$ fällt, was gerade der Fall ist, wenn die Felder mit $1/r$ fallen.

Trägt man (4.110) in ein Polardiagramm (sog. Strahlungscharakteristik) auf, also die Intensität in Abhängigkeit vom Winkel (zur Dipolachse), erhält man die sog. „Dipol-Charakteristik" (s. Abb. 4.1).

Weiterhin erhält man aus (4.110) die gesamte Strahlungsleistung der Quelle zu

$$P = \int \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega}\,\mathrm{d}\Omega = \frac{c}{12\pi\varepsilon_0}p^2k^4. \tag{4.111}$$

Man sieht, daß die Strahlungsleitsung mit der vierten Potenz der Frequenz ($k = \omega/c$) wächst.

Nahzone

In der Nahzone gilt $kr \ll 1, r \ll \lambda$ (aber weiterhin $r \gg d, \lambda \gg d$, man befindet sich in einer Art „Zwischenbereich"). Jetzt kann man folgende Vereinfachungen treffen:

$$\rightsquigarrow e^{ikr} \approx 1, \quad \frac{1}{r^3} \gg \frac{k}{r^2} \gg \frac{k^2}{r} \approx 0.$$

Damit ergibt sich das elektrische Feld aus (4.105) zu

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3\widehat{n}\cdot(\widehat{n}\cdot\vec{p}) - \vec{p}}{r^3} \overset{(2.57)}{=} \vec{E}_D(\vec{x})$$

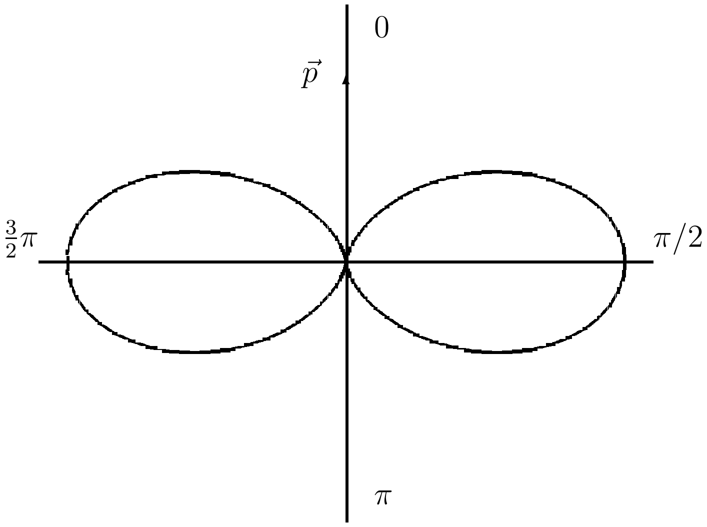

Abbildung 4.1: Strahlungscharakteristik eines (elektrischen) Dipols. Man kann gut erkennen, daß parallel zur Dipolachse keine Abstrahlung stattfindet, während senkrecht zur Achse die Abstrahlungsintensität maximal wird.

Die Ortsabhängigkeit im Nahfeld ist also ein reines Dipolfeld, welches noch mit einem oszillierdendem Zeitfaktor garniert wird:

$$\rightsquigarrow \vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{E}_D(\vec{x}) \cdot e^{-i\omega t}. \tag{4.112}$$

Das B-Feld ergibt sich aus (4.104) unter den obigen Vereinfachungen zu

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} c \frac{k}{r^2} (\widehat{n} \times \vec{p}) \cdot e^{-i(\omega t - \pi/2)}.$$

Das B-Feld ist um $\pi/2$ gegenüber dem E-Feld phasenverschoben, woraus folgt, daß der Poynting-Vektor, gemittelt über eine Periode, verschwindet. Das oszillierende Dipolfeld im Nahbereich strahlt demnach *nicht* ab. Erst für große r treten Retardierungseffekte und damit Abstrahlung auf.

Die **magnetische Dipolstrahlung** ergibt sich analog der elektrischen, man hat nur jeweils das elektrische Dipolmoment durch das magnetische zu ersetzen. Außerdem geht wegen des Maßsystems der Faktor c über in $1/c$. Als Ergebnis für die Winkelverteilung der Strahlungsleistung der magnetischen Dipolstrahlung ergibt sich

$$\left(\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\mathrm{magn}} = \frac{1}{32\pi^2 \varepsilon_0} \frac{\vec{m}^2 \cdot k^4}{c} \cdot \sin^2\theta. \tag{4.113}$$

Man erhält also die gleiche Winkelabhängigkeit wie bei der elektrischen Dipolstrahlung. Allerdings wird i.a. die magnetische Dipolstrahlung unterdrückt (wegen dem Faktor $1/c^2$).

4.6 Felder und Strahlung bewegter Punktladungen

Die Phänomene, die in diesem Abschnitt mathematisch gefaßt werden sollen, sind u.a. Bremsstrahlung, Synchotronstrahlung, Streuung von Licht an geladenen Teilchen (Thomson-Streuung, Rayleigh-Streuung), ...

Die Vorgehensweise wird wie im vorigen Abschnitt ablaufen, aus den Strömen/Ladungen werden die retardierten Potentiale bestimmt, aus denen sich wiederum die Feldstärken und der Poynting-Vektor ergeben.

4.6.1 Retardierte Potentiale

(Lienard-Wiechert-Potentiale)

Betrachtet wird eine Punktladung q auf der Bahn $\vec{r}(t)$ mit der Geschwindigkeit $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t)$. $\vec{x}$ sei ein fester Ortsvektor. Mit $\vec{R}(t)$ wird der Abstandsvektor zwischen Bahn $\vec{r}(t)$ und dem Aufpunkt $\vec{x}$ bezeichnet.

Die Ladungs- und Stromdichte ergibt sich in diesem Fall zu

$$\varrho(\vec{x},t) = q \cdot \delta^3\big(\vec{x} - \vec{r}(t)\big) \tag{4.114}$$

$$\vec{j}(\vec{x},t) = q \cdot \vec{v}(t) \cdot \delta^3\big(\vec{x} - \vec{r}(t)\big) = \vec{v}(t) \cdot \varrho(\vec{x},t). \tag{4.115}$$

Die retardierte Greensche Funktion lautete nach (4.90):

$$G_{\mathrm{ret}}(\vec{x}-\vec{x}', t-t') = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\delta\left(t' - t + \frac{1}{c}|\vec{x}-\vec{x}'|\right).$$

Daraus ergibt sich das retardierte skalare Potential gemäß (4.92) zu

$$\begin{aligned}
\phi(\vec{x},t) &= \frac{1}{\varepsilon_0}\iint G_{\mathrm{ret}}(\vec{x}-\vec{x}', t-t')\varrho(\vec{x}',t')\,\mathrm{d}t'\,\mathrm{d}^3x' \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\iint \frac{\delta^3(\vec{x}'-\vec{r}(t'))}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\delta(t'-t+\frac{1}{c}|\vec{x}-\vec{x}'|)\,\mathrm{d}t'\,\mathrm{d}^3x' \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{1}{|\vec{x}-\vec{r}(t')|}\delta\left(t'-t+\frac{1}{c}|\vec{x}-\vec{r}(t')|\right)\mathrm{d}t'.
\end{aligned} \tag{4.116}$$

Bezeichnet man mit f das Argument der δ-Funktion, so kann man die δ-Funktion nach den einfachen (!) Nullstellen von f entwickeln bzw. in mehrere δ-Funktionen aufspalten:

$$\delta\big(f(t')\big) = \sum_i \frac{\delta(t'-t_i')}{\left|\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t'}\right|_{t'=t_i'}}, \tag{4.117}$$

wobei die $f(t_i')$ die einfachen Nullstellen von f sein sollen. Betrachtet man nun $f = t' - t + \frac{1}{c}R(t)$ mit $R = |\vec{R}|$, so stellt man fest, daß es monoton wächst und demnach höchstens eine

Nullstelle besitzen kann. Der Fall, daß f keine Nullstelle hat, ist uninteressant, da dann das Integral in (4.116) identisch verschwindet. In diesem Fall gäbe es also keine Potentiale, was physikalisch unsinnig ist. Man nimmt also an, daß f genau eine Nullstelle besitzt, die dann folgende Gleichung zu erfüllen hat:

$$t_0' - t + \frac{1}{c} R(t_0') = 0.$$

Bezeichnet man dieses t_0' mit t_{ret}, so erhält man, daß die retardierte Zeit obige Gleichung erfüllen muß (?!):

$$t_{\text{ret}} = t - \frac{1}{c} \cdot R(t_{\text{ret}}). \tag{4.118}$$

Unter Anwendung von (4.117) in (4.116) erhält man das Potential zu

$$\begin{aligned} \phi(\vec{x}, t) &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{|\vec{x} - \vec{r}(t_{\text{ret}})|} \cdot \frac{1}{\left|\frac{\partial f}{\partial t'}\right|_{t=t_{\text{ret}}}} \\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{R(t_{\text{ret}})} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\vec{v}(t_{\text{ret}})\cdot\hat{n}(t_{\text{ret}})}{c}}. \end{aligned}$$

(Dabei ist $\hat{n} := \vec{R}/R$.) Man führt eine für spätere Anwendungen nützliche Schreibweise ein:

$$X(t_{\text{ret}}) \to [X]_{\text{ret}} \qquad X = f(t),$$

womit sich das Potential wie folgt schreiben läßt:

$$\phi(\vec{x}, t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{[R]_{\text{ret}}} \cdot \frac{1}{\left[1 - \frac{\vec{v}\cdot\hat{n}}{c}\right]_{\text{ret}}}. \tag{4.119}$$

Analog erhält man das Vektorpotential:

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot q \cdot \frac{[\vec{v}]_{\text{ret}}}{[R]_{\text{ret}} \cdot \left[1 - \frac{\vec{v}\cdot\hat{n}}{c}\right]_{\text{ret}}}. \tag{4.120}$$

Man führt an dieser Stelle zur Vereinfachung dieser Gleichungen einige Abkürzungen ein:

$$\vec{\beta} := \frac{\vec{v}}{c}, \qquad K(t) := 1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n} = 1 - \frac{\vec{v} \cdot \hat{n}}{c}, \tag{4.121}$$

mit denen sich die obigen Potentiale schön kurz schreiben lassen:

$$\rightsquigarrow \phi(\vec{x}, t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{[KR]_{\text{ret}}}, \tag{4.122}$$

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot q \cdot \left[\frac{\vec{v}}{KR}\right]_{\text{ret}}. \tag{4.123}$$

Diese Potentiale nennt man „Lienard-Wiechert-Potentiale“.

Aus diesen Potentialen kann man zwei interessante Spezialfälle extrahieren:

1. ruhendes Teilchen: $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 = const.$, $\vec{v}(t) = 0$, $\vec{R}(t) = |\vec{x} - \vec{r}_0|$. Die retardierte Zeit geht in diesem Fall wieder über in die „normale“ Zeit. Man erhält die Potentiale zu

$$\phi(\vec{x}, t) = \phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{|\vec{x} - \vec{r}_0|} \qquad \text{(Coulomb-Potential)}, \tag{4.124}$$

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = 0. \tag{4.125}$$

   Wenn das Teilchen ruht, gehen also die retardierten Potentiale wieder über in die statischen.

2. gleichförmig bewegtes Teilchen: $\vec{v} = const.$ $\alpha :=$ Winkel zwischen $\vec{R}(t)$ und $\vec{v}_0$. Die Potentiale ergeben sich nach einiger Rechnerei (s. Nolting S. 353 f.) zu

$$\phi(\vec{x}, t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{|\vec{x} - \vec{r}(t)|} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2} \cdot \sin^2 \alpha}}, \tag{4.126}$$

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{x}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot q \cdot \frac{\vec{v}_0}{|\vec{x} - \vec{r}(t)|} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2} \cdot \sin^2 \alpha}} \\ &= \frac{1}{c^2} \vec{v}_0 \cdot \phi(\vec{x}, t). \end{aligned} \tag{4.127}$$

Bedeutung: ?! Der allgemeine Fall wird im folgenden Abschnitt behandelt:

4.6.2 Feldstärken $\vec{E}$, $\vec{B}$

Die Feldstärken ergeben sich aus den Gln. (4.66) und (4.67):

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x}, t), \tag{4.128}$$

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = -\vec{\nabla} \phi(\vec{x}, t) - \frac{\partial \vec{A}(\vec{x}, t)}{\partial t}. \tag{4.129}$$

Zur Berechnung derselben benutzt man geschickterweise die Potentiale in der Integraldarstellung (4.116):

$$\begin{aligned} \phi(\vec{x}, t) &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{1}{R(t')} \cdot \delta\left(t' - t + \frac{1}{c} \cdot R(t')\right) \mathrm{d}t' \\ \vec{A}(\vec{x}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot q \int \frac{\vec{v}(t')}{R(t')} \cdot \delta\left(t' - t + \frac{1}{c} \cdot R(t')\right). \end{aligned}$$

Folgende Hilfsformeln werden zum Berechnen benötigt:

- $\vec{\nabla} \varphi(\vec{R}, t') = \frac{\partial \varphi}{\partial R} \cdot \widehat{n}(t') \qquad \widehat{n} = \vec{R}/R,$
- $\vec{\nabla} \times (\varphi \cdot \vec{a}) = \varphi \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{a}) + (\vec{\nabla} \varphi) \times \vec{a}$

- $\vec{\nabla} \times \vec{v}(t) = 0$, da $\partial v(t)/\partial x_k = 0$
- $\int g(t')\delta'(f(t'))\,\mathrm{d}t' = -\left[\frac{1}{\left|\frac{\partial f}{\partial t'}\right|} \cdot \frac{\partial}{\partial t'}\left(\frac{g(t')}{\frac{\partial f}{\partial t'}}\right)\right]_{\text{ret}}$, da $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\delta(f(x)) = \delta'(f(x)) \cdot \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$
  $\rightsquigarrow \int g(x)\delta'\big(f(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int \frac{g(x)}{\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\delta\big(f(x)\big)\,\mathrm{d}x \overset{\text{p.I.}}{=} \dots$
- $\int g(t')\delta\big(f(t')\big)\,\mathrm{d}t' = -\frac{1}{[K]_{\text{ret}}} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial t'}\left(\frac{g(t')}{K(t')}\right)\right]_{\text{ret}}$

Berechnung des E-Feldes

Unter Anwendung der obigen Hilfsformeln berechnet man nun das E-Feld:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int \vec{\nabla}\frac{\delta(t'-t+\frac{1}{c}R(t'))}{R(t')}\,\mathrm{d}t' && (4.130)\\ &\quad -\frac{\mu_0}{4\pi}q\int \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\vec{v}(t')}{R(t')}\delta(t'-t+\frac{1}{c}\cdot R(t'))\right). && (4.131)\end{aligned}$$

Nach einiger Rechnerei (s. Nolting S. 355) erhält man das weiter unten benötigte Zwischenergebnis

$$\vec{E}(\vec{x},t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left\{\left[\frac{\widehat{n}}{KR^2}\right]_{\text{ret}} + \frac{1}{c\,[K]_{\text{ret}}}\left[\frac{\partial}{\partial t'}\left(\frac{\widehat{n}(t')-\vec{v}(t')/c}{K(t')\cdot R(t')}\right)\right]_{\text{ret}}\right\}. \tag{4.132}$$

Nach weiteren langwierigen Rechnungen gelangt man unter Benutzung von

$$\frac{\partial}{\partial t'}\widehat{n}(t') = \frac{1}{R}\left(\widehat{n}\cdot(\widehat{n}\cdot\vec{v}) - \vec{v}\right) = \frac{1}{R}\cdot\widehat{n}\times(\widehat{n}\times\vec{v})$$

zum Endergebnis

$$\vec{E}(\vec{x},t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\left[\frac{\left(\widehat{n}-\left(\frac{\vec{v}}{c}\right)\right)\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{K^3\cdot R^2}\right]_{\text{ret}} + \left[\frac{\widehat{n}\times\left[\left(\widehat{n}-\frac{\vec{v}}{c}\right)\times\dot{\vec{v}}\right]}{c^2\cdot K^3\cdot R}\right]_{\text{ret}}\right\}. \tag{4.133}$$

Man kann erkennen, daß man das Feld aufteilen kann in zwei voneinander unabhängige Anteile, einen geschwindigkeitabhängigen und einen beschleunigungsabhängigen ($\vec{a} = \dot{\vec{v}}$).

$$\vec{E} = \vec{E}_v + \vec{E}_a.$$

Berechnung des Magnetfeldes

Man erhält das Magnetfeld durch „ähnliche Rechnungen“ zu

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{x},t) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot q\int\vec{\nabla}\times\left(\frac{\vec{v}(t')}{R(t')}\delta(t'-t+\frac{1}{c}\cdot R(t'))\right)\mathrm{d}t' = \cdots \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}q\left[c\frac{\vec{v}\times\widehat{n}}{K^2\cdot R^2} + \frac{1}{cK}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\vec{v}}{K\cdot R}\right)\times\widehat{n}\right]_{\text{ret}} && (4.134)\end{aligned}$$

Zusammenhang zwischen E- und B-Feld

Unter Benutzung des „Zwischenergebnisses“ (4.132) erhält man aus

$$\begin{aligned}[\widehat{n}]_{\text{ret}} \times \vec{E}(\vec{x},t) &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{cK}\cdot\widehat{n}\times\frac{\partial}{\partial t'}\left(\frac{\widehat{n}-\vec{v}/c}{K\cdot R}\right)\right]_{\text{ret}} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}q\left[c\frac{\vec{v}\times\widehat{n}}{K^2\cdot R^2}+\frac{1}{K}\cdot\frac{\partial}{\partial t'}\frac{\vec{v}}{K\dot{R}}\times\widehat{n}\right]_{\text{ret}} \\ &\overset{(4.134)}{=} c\cdot\vec{B}(\vec{x},t).\end{aligned}$$

Dabei wurde $\varepsilon_0 = 1/\mu_0 c^2$ benutzt. Formt man diesen Ausdruck nach B um, erhält man den gewünschten Zusammenhang:

$$\rightsquigarrow \boxed{\vec{B}(\vec{x},t) = \frac{1}{c}\,[\widehat{n}]_{\text{ret}} \times \vec{E}(\vec{x},t)}. \tag{4.135}$$

Man sieht, daß auch B dieselbe Struktur mit einem geschwindigkeits- und einem beschleungigungsabhängigen Anteil aufweist. Die einzelnen Beiträge stehen im selbem Verhältnis wie die Felder insgesamt. Außerdem erhält man aus der letzten Gleichung, daß $\vec{E}$ und $\vec{B}$ senkrecht aufeinander stehen.

Abstandsverhalten

Man kann leicht erkennen, daß die geschwindigkeitsabhängigen Anteile der Felder für große $[R]_{\text{ret}}$ mit $1/\left[R^2\right]_{\text{ret}}$ fallen, während die beschleunigungsabhängigen Anteile mit $1/[R]_{\text{ret}}$ fallen. Somit hat man erhalten (s. auch S. 94), daß nur die (für große $[R]_{\text{ret}}$ dominanten) beschleunigungsabhängigen Anteile zur Abstrahlung beitragen, was auch im folgenden Abschnitt noch herausgearbeitet wird. Die geschwindigkeitsabhängigen Felder sind eher „statische“ Felder, deren Energie lokalisiert bleibt, also nicht ins Unendliche transportiert wird.

4.6.3 Abstrahlung

Man berechnet wieder den Poynting-Vektor gemäß (4.108):

$$\begin{aligned}\vec{S} &= \frac{1}{\mu_0}\cdot\vec{E}(\vec{x},t)\times\vec{B}(\vec{x},t) \\ &= \frac{1}{\mu_0}\left\{\vec{E}_v\times\vec{B}_v+\vec{E}_v\times\vec{B}_a+\vec{E}_a\times\vec{B}_v+\vec{E}_a\times\vec{B}_a\right\}.\end{aligned}$$

Nur der letzte Summand beinhaltet eine $1/\left[R^2\right]_{\text{ret}}$-Proportionalität, also wird gemäß den Überlegungen auf S. 94 nur dieser Term zur Abstrahlung, also dem Energietransport ins

Unendliche beitragen. Der Energieverlust des Teilchens aufgrund der Abstrahlung kann damit ebenfalls nur durch diesen Term beschrieben werden. Man erhält, wenn man den Poynting-Vektor für den beschleunigungsabhängigen Anteil berechnet:

$$\begin{aligned}
\vec{S}_a &= \frac{1}{\mu_0}\vec{E}_a \times \vec{B}_a \overset{(4.135)}{=} \frac{1}{\mu_0 c} \cdot \vec{E}_a \times \left([\widehat{n}]_{\text{ret}} \times \vec{E}_a\right) \\
&= \frac{1}{\mu_0 c}\left\{[\widehat{n}]_{\text{ret}}\,\vec{E}_a^2 - \underbrace{\left([\widehat{n}]_{\text{ret}} \cdot \vec{E}_a\right)}_{=0} \cdot \vec{E}_a\right\} \\
&= \frac{1}{\mu_0 \cdot c} \cdot [\widehat{n}]_{\text{ret}} \cdot \vec{E}_a^2. \qquad (4.136)
\end{aligned}$$

Dieser Term gibt den Energiestrom zur Zeit t_{ret} in Richtung $[\widehat{n}]_{\text{ret}}$ an, der zur Zeit t am Ort $\vec{x}$ ankommt.

Die Strahlungsleistung bzw. den Leistungsfluß durch ein Flächenelement $\mathrm{d}\vec{\sigma}$ am Ort $\vec{x}$ (im Abstand $[R]_{\text{ret}}$ von der Strahlungsquelle) erhält man aus (4.109)

$$\mathrm{d}P_t = \vec{S}_a \cdot \mathrm{d}\vec{\sigma} = \vec{S}_a \cdot \underbrace{[\widehat{n}]_{\text{ret}} \cdot \left[R^2\right]_{\text{ret}}\,\mathrm{d}\Omega}_{=\mathrm{d}\vec{\sigma}}.$$

Daraus ergibt sich die abgestrahlte Leistung in Richtung $[\widehat{n}]_{\text{ret}}$ zu

$$\frac{\mathrm{d}P_t}{\mathrm{d}\Omega} = \vec{S}_a \cdot [\widehat{n}]_{\text{ret}} \cdot \left[R^2\right]_{\text{ret}} \equiv \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\Omega}(t, [\widehat{n}]_{\text{ret}}). \qquad (4.137)$$

Dieser Ausdruck beschreibt die Energie, die pro Zeitintervall $\mathrm{d}t$ zur Zeit t in Richtung von $[\widehat{n}]_{\text{ret}}$ am Ort $\vec{x}$ (dem Betrachtungsort; Ort des Meßgeräts) ankommt. Interessant ist aber auch die Energie, die das Teilchen zur Zeit t_{ret} tatsächlich in Richtung $[\widehat{n}]_{\text{ret}}$ im Zeitintervall $\mathrm{d}t_{\text{ret}}$ abgestrahlt hat, sie ergibt sich, indem man in obiger Gleichung t durch t_{ret} ersetzt und bei der Zeitableitung die Kettenregel anwendet:

$$\rightsquigarrow \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t_{\text{ret}},\,\mathrm{d}\Omega}(t_{\text{ret}}, [\widehat{n}]_{\text{ret}}) = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t_{\text{ret}}} \cdot \frac{\mathrm{d}P_t}{\mathrm{d}\Omega} =: \frac{\mathrm{d}P_s}{\mathrm{d}\Omega}. \qquad (4.138)$$

Der Unterschied zwischen den beiden Gleichungen besteht darin, daß man aus der unteren Gleichung die Energie $\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t_{\text{ret}},\mathrm{d}\Omega}(t_{\text{ret}}, [\widehat{n}]_{\text{ret}})$, die das Teilchen zur Zeit t_{ret} emittiert hat in Beziehung setzen kann mit der zur Zeit t gemessen Energie ($\frac{\mathrm{d}P_t}{\mathrm{d}\Omega}$). Der Korrekturterm beschreibt so etwas wie den Doppler-Effekt, denn wenn das Teilchen z.B. senkrecht auf den Beobachter zufliegt, mißt man eine Energie die (wegen der Verkürzung der Wellenlänge durch eben den Doppler-Effekt) scheinbar größer ist, als die vom Teilchen tatsächlich emittierte Energie.

Gl. (4.138) kann man noch weiter umformen, indem man die Zeitableitung bestimmt. Die Zeit t_{ret} war gemäß (4.118) definiert als

$$t = t_{\text{ret}} + \frac{1}{c} \cdot R(t_{\text{ret}}), \qquad R(t_{\text{ret}}) = |\vec{x} - \vec{r}(t_{\text{ret}})|.$$

Bildet man nun einfach die Ableitung (aus (4.138)), erhält man

$$\rightsquigarrow \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t_{\mathrm{ret}}} = 1 + \frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}R(t_{\mathrm{ret}})}{\mathrm{d}t_{\mathrm{ret}}} = 1 - \left[\frac{\vec{v}\cdot\widehat{n}}{c}\right]_{\mathrm{ret}} \overset{(4.121)}{=} [K]_{\mathrm{ret}}\,.$$

Damit erhält man nun aus (4.138) die abgestrahlte Leitung zur Zeit t_{ret} in Richtung $[\widehat{n}]_{\mathrm{ret}}$ zu

$$\rightsquigarrow \frac{\mathrm{d}P_s}{\mathrm{d}\Omega} = \vec{S}_a \cdot [\widehat{n}]_{\mathrm{ret}} \cdot \left[R^2\right]_{\mathrm{ret}} \cdot [K]_{\mathrm{ret}}\,.$$

Setzt man den „beschleunigten“ Poynting-Vektor aus (4.136) und das entsprechende E_a aus (4.133) in die letzte Gleichung ein, erhält man

$$\rightsquigarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}P_s}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{q^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3} \cdot \frac{\left[\widehat{n} \times \left((\widehat{n} - \vec{\beta}) \times \vec{a}\right)\right]^2_{\mathrm{ret}}}{\left[1 - \widehat{n}\cdot\vec{\beta}\right]^5_{\mathrm{ret}}}}, \tag{4.139}$$

mit β azs (4.121). Gleichung (4.139) beschreibt die Energie, die das Teilchen zur Zeit t_{ret} in den Raumwinkel Ω emittiert hat. Da *alle* Größen in dieser Gleichung allein von t_{ret} abhängen, ist es egal, ob man das Teilchen zur Zeit t oder zur Zeit t_{ret} betrachtet, man kann also den Index „ret“ im weiteren einfach weglassen.

Ein weiterer, interessanter Fakt ist, daß Gl. (4.139) exakt, ohne Näherungen, hergeleitet wurde und somit relativistisch immer noch korrekt ist, Im folgenden werden einige Spezialfälle zum Veranschaulichen der Gleichung betrachtet:

1. **Nichtrelativistische Bewegung**, d.h. $\beta := |\vec{\beta}| \ll 1$, bzw. $v \ll c$. In diesem Fall kann man nach β entwicklen und erhält aus (4.139)

   $$\frac{\mathrm{d}P_s}{\mathrm{d}\Omega} \approx \frac{q^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3} \underbrace{[\widehat{n} \times (\widehat{n} \times \vec{a})]^2}_{=|\widehat{n}\times\vec{a}|^2 = a^2 \sin^2\theta}, \tag{4.140}$$

   wenn θ der Winkel zwischen dem Beschleunigungsvektor und $\widehat{n}$ ist (beachte: $\widehat{n}^2 = 1$). Trägt man die Werte von $\mathrm{d}P_s/\,\mathrm{d}\Omega$ in einem Polardiagramm auf, erhält man wieder eine Strahlungscharakteristik, wie in Abb. 4.1 auf S. 95, jedoch hat man die Dipolachse durch die Beschleunigungsrichtung zu ersetzen.

   Durch Integration über alle Raumwinkel erhält man die gesamte abgestrahlte Leistung zu

$$\boxed{P_s = \int \frac{\mathrm{d}P_s}{\mathrm{d}\Omega}\,\mathrm{d}\Omega = \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi} \sin\theta \frac{\mathrm{d}P_s}{\mathrm{d}\Omega}\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi = \frac{q^2 \cdot a^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}} \ \text{Larmor-Formel.} \tag{4.141}$$

2. **Relativistische Bewegung** eingeschränkt, dahingehend, daß $\vec{v}$ und $\dot{\vec{v}}$ parallel oder antiparallel stehen sollen. Aus dieser Parallelität folgt, daß das Kreuzprodukt $\vec{\beta} \times \vec{a}$ verschwindet. Führt man noch den Winkel $\theta = \angle(\widehat{n}, \vec{v})$ ein, so erhält man aus (4.139)

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}P_s}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{q^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3} \frac{a^2 \sin^2\theta}{(1-\beta\cdot\cos\theta)^5}}. \tag{4.142}$$

Im Fall $\beta \ll 1$ ergibt sich wieder die „normale" nichtrelativistische Strahlungscharakteristik. Ist jedoch $\beta \approx 1$, so verschiebt sich die Strahlungscharakteristik (s. Abb. 4.2) nach „vorne". Auch die Intensität der Strahlung nimmt (wegen des Doppler-Effekts

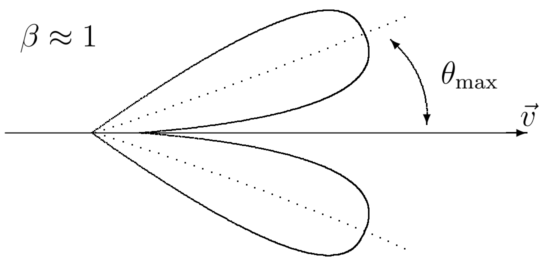

Abbildung 4.2: Für Geschwindigkeiten, die nicht mehr klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit sind ($\beta \to 1$), verschiebt sich in der Strahlungscharakteristik die Strahlungsintensität nach „vorne", also in die Richtung, in die das strahlende Teilchen fliegt. Für hochenergetische Teilchen wird $\theta_{\max} = \arccos \frac{\sqrt{1+15\beta^2}}{3\beta} \xrightarrow{\beta\to 1} \frac{1}{2\gamma}$, mit dem in (4.145) definierten γ.

?!) zu, wenn die Geschwindigkeiten der Teilchen groß werden.

3. **Bewegung auf Kreisbahn** (Synchrotron-Strahlung) In diesem Fall ist $\vec{v} \perp \vec{a}$, die Umlauffrequenz soll konstant sein $\omega = 2\pi/T$. T ist die Umlaufsdauer, $|\vec{v}| = \omega \cdot r$, r Radius der Bahn. Kreisbeschleunigung: $|\vec{a}| = \omega^2 \cdot r = v^2/r$.

Betrachtet wird das Teilchen zu einem festen Zeitpunkt t, an dem es in $\hat{e}_z$-Richtung fliegt. Der Mittelpunkt der Kreisbahn liege zur Zeit t in $\hat{e}_x$-Richtung, es ist also

$$\vec{v} = v \cdot \hat{e}_z, \qquad \vec{a} = a \cdot \hat{e}_x.$$

Der Einheitsvektor in Richtung der Abstrahlung in Kugelkoordinaten hat folgende Gestalt:

$$\widehat{n} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \theta = \angle(\widehat{n}, \vec{v}), \quad \varphi = \text{Azimutwinkel bzgl. } x.$$

Mit diesen Bezeichnungen erhält man

$$\rightsquigarrow \widehat{n}\cdot\vec{\beta} = \beta\cdot\cos\theta, \quad \vec{a}\cdot\widehat{n} = a\cdot\sin\theta\cos\varphi, \quad \vec{\beta}\cdot\vec{a} = 0,$$

und damit aus (4.139)

$$\rightsquigarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}P_s}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{q^2 a^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3}\frac{(1-\beta\cos\theta)^2(1-\beta^2)\sin^2\theta\cos^2\varphi}{(1-\beta\cos\theta)^5}}. \tag{4.143}$$

Damit ergibt sich die Gesamtstrahlungsleistung zu

$$\boxed{P_s = \int \frac{\mathrm{d}P_s}{\mathrm{d}\Omega}\,\mathrm{d}\Omega = \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\left(\frac{v^2}{r}\right)^2\gamma^4 = \frac{q^2 c\beta^4\gamma^4}{6\pi\varepsilon_0\cdot r^2}}. \tag{4.144}$$

Dabei ist

$$\gamma := \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = E/mc^2 \tag{4.145}$$

die (relativistische) Energie des Teilchens dividiert durch seine Ruheenergie.

Für große Geschwindigkeiten ($\beta \to 1 \rightsquigarrow \gamma \to \infty$) erhält man den „Energieverlust pro Umlauf" zu

$$P_s \cdot T \approx P_s \cdot \frac{2\pi r}{c} \sim \frac{1}{r}\left(\frac{E}{mc^2}\right)^4.$$

Daran kann man erkennen, daß in Teilchenbeschleunigern möglichst große Radien benötigt werden, um den Energieverlust durch Strahlung klein zu halten, sofern diese Strahlung nicht genutzt werden soll.

Eine weitere Anwendung der Gleichung (4.139) liegt in der Streuung von elektromagnetischen Wellen an geladenen Teilchen. Hat man ein Teilchen der Masse m und der Ladung q und eine einlaufende ebene Welle fester Frequenz vorgegeben:

$$\vec{E}, \vec{B} \sim e^{-i\omega t},$$

so wirkt auf das Teilchen eine externe Kraft

$$\vec{F}_{\text{ext}} = q\cdot(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}).$$

Mit dieser Kraft stellt man die nichtrelativistische Bewegungsgleichung auf

$$m\cdot\ddot{\vec{x}} = \vec{F}_{\text{ext}} + \vec{F}_{\text{int}}.$$

$\vec{F}_{\text{int}}$ tritt nur auf, falls das Teilchen gebunden ist, also mit einem anderen Teilchen wechselwirkt. Aus der Lösung dieser Dgl. erhält man durch zweimaliges Differenzieren die Beschleunigung, mit der man wiederum in (4.139) eingeht. Die Strahlungsleistung $\mathrm{d}P_s/\,\mathrm{d}\Omega$ mittelt man über eine Periode und normiert sie auf die Intensität der einfallenden Welle

$$\langle S_{\text{in}}\rangle = \frac{1}{2}\varepsilon_0|\vec{E}_0|^2.$$

Man erhält den „differentiellen Wirkungsquerschnitt":

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} := \left\langle \frac{1}{|\vec{S}_{\mathrm{in}}|} \cdot \frac{\mathrm{d}P_s}{\mathrm{d}\Omega} \right\rangle . \tag{4.146}$$

Im Falle von freien Elektronen (keine interne Kraft) spricht man von „Thomson-Streuung", welche der klassische Grenzfall der Compton-Streuung für kleine ω ist.

4.6.4 Strahlungsdämpfung

Ein geladenes Teilchen befinde sich in einem äußeren z.B. elektromagnetischen) Kraftfeld $\vec{F}_{\mathrm{ext}}$. Die nichtrelativistische Bewegungsgleichung lautet

$$m \cdot \dot{\vec{v}} = \vec{F}_{\mathrm{ext}},$$

welche aber nicht berücksichtigt, daß für vorhandene externe Kraft $\rightsquigarrow \dot{\vec{v}} = \vec{a} \neq 0$ Energieverlust durch Strahlung auftritt. Daher modifiziert man die klassische Bewegungsgleichung, indem man noch eine zusätzliche „fiktive" Kraft einführt, die gerade den Strahlungsverlust beinhalten soll:

$$m \cdot \dot{\vec{v}} = \vec{F}_{\mathrm{ext}} + \vec{F}_{\mathrm{rad}}. \tag{4.147}$$

$\vec{F}_{\mathrm{rad}}$ spielt die Rolle einer fiktiven „Reibungskraft", bedingt durch Strahlung. Aufgrund dieser Kraft wird die Bewegung des Teilchens gedämpft ($\rightsquigarrow$ „Strahlungsdämpfung").

Bestimmung von $\vec{F}_{\mathrm{rad}}$

Um die gesuchte Kraft zu bestimmen, benötigt man die Larmor-Formel (4.141):

$$P(t) = \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \cdot \dot{\vec{v}}^2 .$$

Man faßt diese Strahlungsleistung nun auf, als wäre sie durch $\vec{F}_{\mathrm{rad}}$ verrichtet worden:

$$-P(t) = \vec{F}_{\mathrm{rad}} \cdot \vec{v}.$$

Aus dieser letzten Formel erhält man durch Zeitintegration die Arbeit zu

$$\begin{aligned} W &= \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{\mathrm{rad}} \cdot \vec{v}\,\mathrm{d}t = -\frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \int_{t_1}^{t_2} \dot{\vec{v}}^2\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \left(\int_{t_1}^{t_2} \ddot{\vec{v}} \cdot \vec{v}\,\mathrm{d}t - \left[\dot{\vec{v}} \cdot \vec{v} \right]_{t_1}^{t_2} \right) . \end{aligned}$$

Durch die Bedingung $\left[\dot{\vec{v}} \cdot \vec{v}\right]_{t_1}^{t_2} = 0$ schränkt man die zugelassenen Bewegungen auf Kreisbewegungen oder andere periodische Bewegungen (Periodendauer T) ein. Führt man nun das „Rest-Integral" aus, erhält man, wenn man nach $\vec{F}_{\text{rad}}$ auflöst:

$$\rightsquigarrow \vec{F}_{\text{rad}} = \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \cdot \ddot{\vec{v}}. \tag{4.148}$$

Setzt man dies in die modifizierte Bewegungsgleichung (4.147) ein, erhält man

$$\rightsquigarrow \boxed{m\dot{\vec{v}} - \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\ddot{\vec{v}} = \vec{F}_{\text{ext}}} \qquad \text{(Abraham-Lorentz-Gleichung).} \tag{4.149}$$

Diese Gleichung ist jedoch mit Vorsicht zu genießen, da sie (für die Mechanik völlig untypisch) die Ableitung der Beschleunigung beinhaltet, was zu ernsthaften physikalischen Problemen führen kann.

Gibt man z.B. eine Anfangsbedingung $\dot{\vec{v}}(0) = \vec{a}_0 \neq 0$ und für Zeiten $t > 0$ eine verschwindende externe Kraft vor, erhält man aus der Gleichung

$$m\dot{\vec{v}} - \alpha\ddot{\vec{v}} = 0 \qquad \alpha = \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3},$$

so folgt als Lösung dieser eher einfachen Dgl. 1. Ordnung

$$\dot{\vec{v}} = \vec{a}_0 \cdot e^{\frac{m}{\alpha}t},$$

was bedeutet, daß das Teilchen ständig weiterbeschleunigt wird, obwohl keine Kraft mehr vorhanden ist, was natürlich physikalisch unsinnig ist.

Der Sinn der Gleichung (4.147) liegt in der Störungsrechnung, denn wenn die Abstrahlung klein ist, wenn also die „Strahlungsreibung" klein gegen die externe Kraft ist, kann man sie beim Berechnen der Bahnkurve vernachlässigen und erst später wieder berücksichtigen. Dies ist erfüllt für

$$\lambda \gg \frac{q^2}{3\varepsilon_0 m c^2},$$

was für Elektronen ungefähr eine Wellenlänge der Größenordnung 10^{-12} m ergibt.

Mit diesem Abschnitt wird die Behandlung der Elektrodynamik abgeschlossen (später aber nochmals aufgegriffen). Es folgt die (spezielle) Relativitätstheorie, mit deren Hilfe auch einige Aspekte der Elektrodynamik eleganter formuliert werden können.

Kapitel 5

Spezielle Relativitätstheorie

Am Anfang dieses Kapitels seien zuerst die beiden wichtigsten Grundprinzipien der speziellen Relativitäätstheorie genannt:

1. Relativitätsprinzip: besagt, daß alle Inertialsysteme (IS) gleichwertig sind, die physikalischen (nicht nur die mechanischen) Gesetze haben in allen IS die gleiche Form.
2. Invarianz der Lichtausbreitung besagt, daß sich das Licht in allen IS mit der gleichen Geschwindigkeit ausbreitet.

   Um dies mathematisch fassen zu können, betrachtet man im Inertialsystem IS eine punktförmige Lichtquelle am Ort $\vec{x}_0$. Die Wellenfronten (Flächen konstanter Phase) dieser Kugelwellen ergeben sich aus

   $$(\vec{x} - \vec{x}_0)^2 - c^2(t - t_0)^2 = 0,$$

   mit c, der Vakuumlichtgeschwindigkeit. In einem anderen Inertialsystem IS', welches sich mit konstanter Geschwindigkeit gegen IS bewegt, befinde sich die Lichtquelle am Ort $\vec{x}'_0$, die Wellenfronten ergeben sich aus

   $$(\vec{x}' - \vec{x}'_0)^2 - c^2(t' - t'_0)^2 = 0.$$

   Der Zusammenhang zwischen den Koordinaten $\vec{x}$ und $\vec{x}'$, also der Übergang von einem Bezugsystem in das jeweils andere, führt auf die „Lorentz-Transformation“:

   $$(\vec{x}, t) \longrightarrow (\vec{x}', t').$$

Nimmt man 1 und 2 zusammen, so erhält man als Folgerung, daß die physikalischen Gesetze invariant unter Lorentz-Transformationen sind, was jedoch auf die klassische Mechanik nicht zutrifft (in der Mechanik müssen die Bewegungen i.a. relativistisch korrigiert werden, da sie unvereinbar mit 2, der Invarianz der Lichtausbreitung sind). Die Elektrodynamik bleibt jedoch invariant unter den Lorentz-Transformationen, was aber erst durch eine Neuformulierung klar ersichtlich wird.

5.1 Begriffe aus der Linearen Algebra, Konventionen

V sei ein n-dimensionaler reeller **Vektorraum**. Mit $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \ldots, \underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in V$ werden n-dimensionale **Vektoren** eingeführt.

(Der Unterstrich bezeichnet im folgenden immer einen Vektor der Dimension $d > 3$, während mit dem üblichen Vektorpfeil weiterhin ein „normaler“ dreidimensionaler Vektor im euklidischen Raum bezeichnet wird.)

V ist ein linearer Raum, so daß folgendes gilt:

$$\underline{a} + \underline{b} \in V, \qquad \text{und} \quad \lambda \cdot \underline{a} \in V \text{ f. } \lambda \in \mathbf{R}.$$

Eine **Basis** von V ist gegeben durch n lineare unabhängige, üblicherweise normierte Vektoren $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n \in V$. Ein beliebiger Vektor $\underline{x} \in V$ kann dann wie folgt dargestellt werden:

$$\underline{x} = \sum_{k=1}^{n} x^k \cdot \underline{e}_k.$$

Die auftretenden Proportionalitätsfaktoren zu den Basisvektoren $\underline{e}_k$ werden als **kontravarianten** Komponenten $x^k \in \mathbf{R}$ des Vektors $\underline{x}$ bezeichnet. Sie haben konventionsgemäß einen *oberen* Index. Im Gegensatz dazu stehen die *kovarianten* Komponenten, die sich aus der Projektion des Vektors $\underline{x}$ auf die Basisvektoren ergeben und den Index *unten* tragen, s. auch Abb. 5.1).

Der Einfachheit halber wird als abkürzende Schreibweise die **Einsteinsche Summationskonvention** eingeführt: es wird vereinbart, über gleiche Indizes (einer oben, einer unten) immer automatisch zu summieren. Dementsprechend wird das Summenzeichen einfach unterdrückt

$$\sum_{k=1}^{n} x^k \cdot \underline{e}_k \equiv x^k \underline{e}_k \quad (!)$$

Einen Übergang von einer Basis $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n$ zu einer neuen $\underline{e}'_1, \ldots, \underline{e}'_n$ nennt man **Basistransformation**:

$$\underline{e}_l = A^k{}_l \underline{e}'_k \quad \left(\equiv \sum_{k=1}^{n} A^k{}_l \underline{e}'_k \right). \tag{5.1}$$

Dabei sind die $A^k{}_l \in \mathbf{R}$ die Komponenten einer $n \times n$-Matrix (k: Zeile, l: Spalte).

Die kontravarianten Komponenten transformieren sich unter dieser Basistransformation nun wie folgt:

$$\underline{x} = x'^k \underline{e}'_k = x^l \underline{e}_l = x^l A^k{}_l \underline{e}'_k.$$

Koeffizientenvergleich liefert

$$\boxed{x'^k = A^k{}_l x^l},$$

was man als *kontravariantes Transformationsverhalten* zur Basistransformation (5.1) bezeichnet.

Um ein **Inneres Produkt** (Skalarprodukt) zu vereinbaren, benötigt man eine Metrik. Außerdem muß ein inneres Produkt noch einigen Voraussetzungen genügen, es muß bilinear (linear in jedem Argument) und symmetrisch sein. (In der Mathematik müßte es noch positiv definit sein, bei dem folgenden inneren Produkt ist es jedoch, wie sich zeigen wird, sinnvoll, auf diese Eigenschaft zu verzichten, was sich später zeigen wird.) Man definiert sich also eine Metrik durch das Skalarprodukt der Basisvektoren:

$$\underline{e}_k \cdot \underline{e}_l = g_{kl} \ \in \mathbf{R},$$

wobei g_{kl} die Komponenten des *metrischen Tensors* darstellen, der bei orthogonalen Basisvektoren in das Kronecker-Symbol übergeht. Unter der Annahme, daß man g_{kl} kennt, kann man das innere Produkt wie folgt schreiben:

$$\underline{x} \cdot \underline{y} = (x^k \underline{e}_k) \cdot (y^l \underline{e}_l) = (\underline{e}_k \cdot \underline{e}_l) x^k y^l = g_{kl} x^k y^l.$$

Speziell erhält man (unter Benutzung des Skalarprodukts) die **kovariante** Komponente von $\underline{x}$ durch:

$$\underline{x} \cdot \underline{e}_k = g_{kl} x^l =: x_k.$$

Die kovariante Komponente zeichnet sich dadurch aus, daß sie sich transformiert wie die Basisvektoren, also kovariantes Verhalten an den Tag legt. Anschaulich ist der Unterschied zwischen ko- und kontrvariante Komponenten in Abb. 5.1 dargestellt.

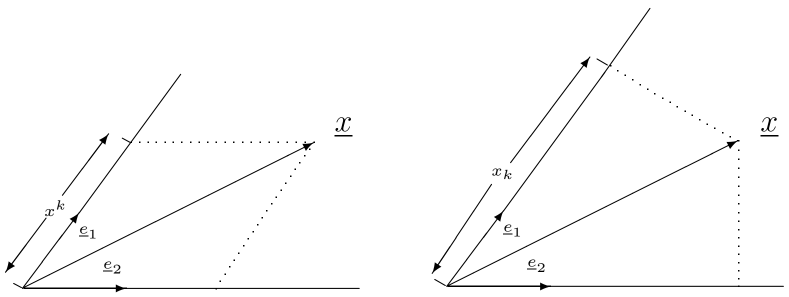

Abbildung 5.1: Zur Verdeutlichung des Unterschieds zwischen der kovarianten Komponente x_k und der kontravarianten Komponente x^k eines Vektors

Liegt eine Orthogonalbasis vor, ist also $g_{kl} = \delta_{kl}$, so unterscheiden sich die ko- und die kontravariante Komponente nicht!

Unter Benutzung der ko- und der kontravarianten Komponente läßt sich das Skalarprodukt wie folgt schreiben:

$$\underline{x} \cdot \underline{y} = g_{lk} x^k y^l \equiv x_l y^l$$

5.2 Lorentz-Transformation

Man kann ein raum-zeitliches Ereignis auffassen als einen Punkt in einem 4-dimensionalen Raum. Diesen Punkt kann man durch 4 Koordinaten bzgl. eines festen Systems (!) beschreiben:

$$\begin{aligned} &\text{Ereignis P} \longleftrightarrow (x^0, x^1, x^2, x^3) \\ \text{mit} \quad &x^0 = c \cdot t, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z. \end{aligned}$$

Der Faktor c =Vakuumlichtgeschwindigkeit wurde der Einheit wegen eingefügt. Man sieht also, daß die Raum-Zeit die Struktur eines linearen Raums hat, wobei die x^0, x^1, x^2, x^3 die kontravarianten Komponenten eines 4-dimensionalen Vektors sind.

Im folgenden wird vereinbart, daß griechische Indizes immer die Werte $0, 1, 2, 3$ annehmen, während normale lateinische Buchstaben zur Bezeichnung der räumlichen Komponenten verwendet werden, also nur über $1, 2, 3$ laufen. Die 4-dimensionalen Vektoren haben damit folgende Gestalt:

$$(x^\mu) = (x^0, x^1, x^2, x^3), \quad \mu = 0, 1, 2, 3.$$

Man bezeichnet solche 4-dimensionalen Vektoren auch kurz als 4-Vektor (Vierervektor)

Die eigentliche **Lorentz-Transformation** (LT) stellt mathematisch einfach nur einen Basiswechsel von einem System S zu einem System S' dar (s. (5.1)):

$$\begin{aligned} \Lambda: &\quad S \to S' \\ \Lambda: &\quad x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Dabei ist $\Lambda^\mu{}_\nu$ die Transformationsmatrix. a^μ berücksichtigt eine evtl. Nullpunktsverschiebung.

Aus der Invarianz der Lichtausbreitung erhält man (s. Anfang des Kapitels)

$$(\vec{x} - \vec{x}_0)^2 - c^2(t - t_0)^2 \;=\; (\vec{x}' - \vec{x}'_0)^2 - c^2(t' - t'_0)^2.$$

Die einzelnen Seiten dieser Gleichung kann man wie folgt umschreiben:

$$-c^2(t - t_0)^2 + \sum_{k=1}^{3} (x^k - x_0^k)^2 = g_{\mu\nu}(x - x_0)^\mu (x - x_0)^\nu \equiv (\underline{x} - \underline{x}_0)^2$$

Man beachte, daß bei dieser Umformung auf griechische Indizes übergegangen wurde, welche die Zeitkomponente also beeinhalten. Dabei wurde der **metrische Tensor** dieses speziellen Raumes eingeführt:

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.3}$$

Durch die so definierte (indefinite) Metrik ist ein 4-dimensionaler Vektorraum, der sog. „**Minkowski-Raum**" eingeführt worden.

Führt man nun folgende Abkürzung ein

$$x^\mu - x_0^\mu =: \Delta x^\mu; \qquad x'^\mu - x_0'^\mu =: \Delta x'^\mu,$$

so kann man die Invarianz der Lichtausbreitung formalisiert durch den metrischen Tensor ausdrücken:

$$g_{\mu\nu}\Delta x^\mu \Delta x^\nu = g_{\mu\nu}\Delta x'^\mu \Delta x'^\nu. \tag{5.4}$$

Den „gestrichenen" Teil kann man mittels (Lorentz-) Transformationsmatrix umschreiben in

$$\Lambda : \quad \Delta x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \Delta x^\nu,$$

so daß man (5.4) umschreiben kann in

$$\rightsquigarrow g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\varrho \Delta x^\varrho \Lambda^\nu{}_\sigma \Delta x^\sigma \stackrel{!}{=} g_{\mu\nu}\Delta x^\mu \Delta x^\nu.$$

Diese Beziehung muß für alle Δx erfüllt sein, so daß man folgende Bedingung erhält, die eine Lorentz-Transformation erfüllen muß:

$$\boxed{g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\varrho \Lambda^\nu{}_\sigma = g_{\varrho\sigma}}. \tag{5.5}$$

Durch diese Bedingung ist die Lorentz-Transformation definiert. Es handelt sich hierbei um die *homogene* LT, da die Nullpunktsverschiebung nicht berücksichtigt wird.

Ein Folgerung aus (5.5) ist

$$\Lambda^T\Lambda \;=\; I \rightsquigarrow \det\Lambda^2 = 1 \rightsquigarrow \det\Lambda = \pm 1.$$

(I: Einheitsmatrix) Im Fall von $\det\Lambda = +1$ spricht man von einer eigentlichen, andernfalls von einer uneigentlichen LT, welche zusätzlich noch Raum- oder Zeitspiegelungen beinhalten kann.

Führt man ein 4-dimensionales Volumenelement d^4x ein, so stellt man fest, daß dies unter LT invariant bleibt:

$$\mathrm{d}^4x' = \mathrm{d}^4x \underbrace{|\det\Lambda|}_{=1} = \mathrm{d}^4x.$$

Es folgen einige Beispiele von Lorentz-Transformationen:

- Nullpunktsverschiebung: $x^\mu \to x^\mu + a^\mu$
- Räumliche Drehungen:

$$(\Lambda^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & (R) & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

  mit einer räumlichen 3×3-Drehmatrix R, welche die Bedingung $R^T R = I$ erfüllt.

- $S \to S'$, S' bezgl. S gleichförmig bewegt: „Boost". Zunächst wird nur der Spezialfall der Bewegung in x-Richtung betrachtet, die zugehörige Transformationsmatrix lautet:

$$(\Lambda^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  mit den üblichen Abkürzungen

$$\beta := v/c, \qquad \gamma := \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

  Führt man diese Transformation für die einzelnen Komponenten aus, erhält man

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow x^0 &= \gamma x^0 - \beta\gamma x^1; \qquad x'^2 = x^2 \\ x'^1 &= -\beta\gamma x^0 + \gamma x^1; \qquad x'^3 = x^3. \end{aligned}$$

  Die allgemeine Transformationsmatrix für den Boost lautet:

$$(\Lambda^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta_1 & -\gamma\beta_2 & -\gamma\beta_3 \\ -\gamma\beta_1 & 1+\frac{(\gamma-1)\beta_1^2}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_1\beta_2}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_1\beta_3}{\beta^2} \\ -\gamma\beta_2 & \frac{(\gamma-1)\beta_1\beta_2}{\beta^2} & 1+\frac{(\gamma-1)\beta_2^2}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_2\beta_3}{\beta^2} \\ -\gamma\beta_3 & \frac{(\gamma-1)\beta_1\beta_3}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_2\beta_3}{\beta^2} & 1+\frac{(\gamma-1)\beta_3^2}{\beta^2} \end{pmatrix}$$

  Die zugehörigen Transformationsgleichungen für die Komponenten mag der geneigte Leser selbst berechnen.

Die Lorentz-Transformationen bilden eine Gruppe. Hintereinanderausführen der obigen drei Typen bildet wieder eine Lorentz-Transformation. Die Gruppe der Lorentz-Transformationen (ohne Nullpunktsverschiebung) nennt man „Lorentz-Gruppe". Sie ist eine 6-parametrige Gruppe, welches also räumliche Translation und Drehung beeinhaltet. Die 3 Parameter der Drehung können z.B. die Eulerschen Winkel darstellen.

Läßt man zusätzlich noch die raum-zeitliche Nullpunktsverscheibung zu, so ergibt sich die 10-parametrige „Poincaré-Gruppe" oder „inhomogene Lorentz-Gruppe", die die sog. „Poincaré-Transformationen" beinhaltet.

5.2.1 Tensoren

Allgemeiner 4-Vektor

Im Minkowskiraum transformieren sich die kontravarianten Komponenten eines 4-Vektor a^μ unter Lorentztransformationen Λ wie Δx^μ:

$$\boxed{a'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu a^\nu}.$$

Die kovarianten Komponenten erhält man aus den kontravarianten durch

$$a_\mu = g_{\mu\nu} a^\nu. \tag{5.6}$$

Der Zusammenhang zwischen den ko- und den kontraviarianten Komponenten eines 4-Vektors ist in der speziellen Relativitätstheorie und der vorliegenden Metrik lediglich ein Faktor -1 in der Zeitkomponente.

$$(a^\mu) = (a^0, \vec{a}), \qquad (a_\mu) = (-a^0, \vec{a}) = (a_0, \vec{a}).$$

4-Tensor (*k*-ter Stufe)

$T^{\mu_1\mu_2\dots\mu_k}$ seien die kontravarianten Komponenten eines 4-Tensors k-ter Stufe. Dann transformiert sich jeder Index wie ein Vektorindex unter Lorentztansformationen:

$$S \to S' : \; T'^{\nu_1\nu_2\dots\nu_k} = \Lambda^{\nu_1}{}_{\mu_1}\Lambda^{\nu_2}{}_{\mu_2}\cdots\Lambda^{\nu_k}{}_{\mu_k} T^{\mu_1\mu_2\dots\mu_k}.$$

Die kovarianten Komponenten ergeben sich analog (5.6)

$$T_{\mu_1}{}^{\mu_2\dots\mu_k} = g_{\mu_1\nu_1} T^{\nu_1\mu_2\dots\mu_k}.$$

Durch wiederholtes Anwenden dieser Gleichung auf alle kontravarianten Komponenten (Indizes) erhält man alle kovarianten Komponenten.

Ein 4-Tensor $(T^{\mu\nu})$ 2. Stufe hat die Eigenschaft, daß seine **Spur** invariant unter LT bleibt:

$$\mathrm{Tr}(T) = g_{\mu\nu}T^{\mu\nu} = T_{\mu}{}^{\mu} \quad \text{invariant.}$$

Die Spur ist invariant, da sowohl T als auch g Tensoren sind und somit laut Definition invariant unter LT sein müssen.

Kontraktion von Indizes: Summiert man über eine Komponente eines Tensors k-ter Stufe, so erhält man einen Tensor $(k-1)$-ter Stufe:

$$a_{\mu_1}T^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_k} = \tilde{T}^{\mu_2\mu_3\ldots\mu_k}.$$

Verjüngung eines Tensors Besitzt ein Tensor k-ter Stufe zwei gleiche Indizes (oben und unten), so wird er „verjüngt" zu einem Tensor $(k-2)$-ter Stufe:

$$T_{\mu}{}^{\mu\mu_3\ldots\mu_k} = \tilde{T}^{\mu_3\mu_4\ldots\mu_k}.$$

Skalare, die unter Lorentz-Transformationen invariant bleiben, also in jedem Bezugssystem den gleichen Wert haben, (z.B. Masse m oder Ladung q) nennt man **Lorentz-Skalare**.

5.2.2 Felder

Skalarfeld

Ein Skalarfeld ist wie im Dreidimensionalen definiert:

$$\varphi(\underline{x}) = \varphi(x^0, \vec{x}) \to \mathbf{R}.$$

$\Lambda: \; S \to S'$ sei eine Lorentz-Transformation mit $x^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ (kurz: $\underline{x}' = \Lambda\underline{x}$). P sei ein raumzeitliches Ereignis, dann gilt

$$\varphi\big(P(\text{in } S)\big) = \varphi'\big(P(\text{in } S')\big), \quad \text{also}$$
$$\boxed{\varphi(\underline{x}) = \varphi'(\underline{x}')},$$

da $\varphi'(\underline{x}') = \varphi'(\Lambda\underline{x}) = \varphi(\underline{x})$.

Die **Ableitung** eines Skalarfeldes wird wie folgt „eingeführt":

$$\partial_\mu\varphi := \frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu}. \tag{5.7}$$

Das Differential von φ ist invariant unter LT, da

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu}\,\mathrm{d}x^\mu = \underbrace{\frac{\partial\varphi}{\partial x'^\nu}}_{=\partial'_\nu\varphi} \cdot \underbrace{\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu}}_{=\Lambda^\nu{}_\mu}\,\mathrm{d}x^\mu.$$

Koeffizientenvergleich liefert:

$$\boxed{\partial_\mu = \Lambda^\nu{}_\mu \partial'_\nu}.$$

∂_μ bezeichnet man als „4-Gradient“:

$$\partial_\mu = (\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3) = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}\right) \quad \text{4-Gradient.}$$

Entsprechend ist der kovariante 4-Gradient definiert:

$$\partial^\mu = g^{\mu\nu}\partial_\nu = \left(-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}\right).$$

Aus dem ko- und dem kontravarianten 4-Gradient ergibt sich der invariante d'Alembert-Operator:

$$\partial_\mu\partial^\mu = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta =: \Box = g_{\mu\nu}\partial^\mu\partial^\nu. \tag{5.8}$$

Der d'Alembert-Operator ist, angewandt auf ein Skalarfeld eine Invariante:

$$\Box\varphi(\underline{x}) = \Box'\varphi'(\underline{x}').$$

Vektorfelder

$a^\mu(\underline{x}) = a^\mu(x^0, \vec{x})$ sei ein Vektorfeld, es besitzt dann folgendes Transformationsverhalten:

$$\Lambda:\ S \to S':\quad a'^\mu(\underline{x}') = \Lambda^\mu{}_\nu a^\nu(\underline{x}).$$

Tensorfeld

Analog transformiert sich ein Tensorfeld k-ter Stufe wie ein Tensor k-ter Stufe unter Lorentz-Transformationen:

$$T'^{\nu_1\nu_2\ldots\nu_k}(\underline{x}') = \Lambda^{\nu_1}_{\ \mu_1}\Lambda^{\nu_2}_{\ \mu_2}\cdots\Lambda^{\nu_k}_{\ \mu_k}T^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_k}(\underline{x}).$$

Anmerkung: Differentiation erhöht die Stufe eines Tensors. Differenziert man ein Skalarfeld, erhält man ein Vektorfeld (Gradientenfeld), differenziert man ein Vektorfeld, erhält man ein Tensorfeld 2. Stufe, usw:

$$\partial_\mu\varphi(\underline{x}) = a_\mu(\underline{x});\quad \partial_\mu a_\nu(\underline{x}) = A_{\mu\nu}(\underline{x});\ldots$$

5.3 Relativistische Mechanik

Ein Teilchen der Masse m bewege sich auf einer Bahn $\vec{x}(t)$. In der klassischen Mechanik wurde mit dieser Zuordnung einer Zeit eine 3-dim. Bahn im euklidischen Raum zugeordnet:

$$t \to \vec{x}(t).$$

Im folgenden wird jedem Zeitpunkt ein Punkt auf der 4-dimensionalen Bahnkurve im Minkowski-Raum zugeordnet:

$$t \to \big(x^0(t), \vec{x}(t)\big) = \big(c \cdot t, \vec{x}(t)\big).$$

Man definiert das „**Abstandsquadrat**“ $\mathrm{d}s^2$:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu = -(\mathrm{d}x^0)^2 + (\mathrm{d}\vec{x})^2 \\ &= -c^2(\mathrm{d}t)^2 + (\mathrm{d}\vec{x})^2 = -c^2(\mathrm{d}t)^2\left[1 - \frac{1}{c^2}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}\right)^2\right] \\ &= -c^2(\mathrm{d}t)^2\left[1 - \frac{v^2}{c^2}\right] < 0 \rightsquigarrow \text{ zeitartig.} \end{aligned} \tag{5.9}$$

Wenn das Abstandsquadrat zweier raum-zeitlicher Ereignisse (zweier 4-Vektoren) negativ ist, spricht man von „**zeitartig**“, was, wie man anhand von Abb. 5.2 erkennen kann, bedeutet, daß sich die Ereignisse gegenseitig beeinflussen können. Man kann zwei Punkte innerhalb des Lichtkegels („oben-unten“) mit einer **Weltlinie** verbinden. Diese Weltlinie ist die 4-dimensionale Bahnkurve (und kann in dieser Abbildung niemals eine kleinere Steigung als 1 haben, da die Ausbreitung des Lichts gerade diese Steigung besitzt und es keine Geschwindigkeitkeit oberhalb der Lichtgeschwindigkeit geben kann).

Befinden sich die beiden Ereignisse (Weltpunkte) außerhalb des Lichtkegels, so finden sie „gleichzeitig“ statt, d.h. sie können untereinander keine Informationen austauschen bzw. sich gegenseitig beinflussen. Das Abstandsquadrat dieser Punkt ist nämlich größer als 0 („**raumartig**“), was bedeutet, daß man zur gegenseitigen Beeinflussung eine „Informationsgeschwindigkeit“ benutzen müßte, die oberhalb der des Lichts liegt. Man kann kurz sagen, daß alle Ereignisse außerhalb des Lichtkegels „gleichzeitig“ stattfinden.

Falls das Abstandsquadrat verschwindet, befindet man sich auf dem Lichtkegel, man bewegt sich also wie z.B. Photonen mit Lichtgeschwindigkeit („**lichtartig**“).

Man sollte noch erwähnen, daß man einen raumartigen 4-Vektor $a^2 > 0$ durch eine Lorentz-Transformation immer in einen 4-Vektor der Form $(0, \vec{a})$ überführem kann und einen zeitartigen immer in $(a^0, 0)$, also in ein Ruhesystem.

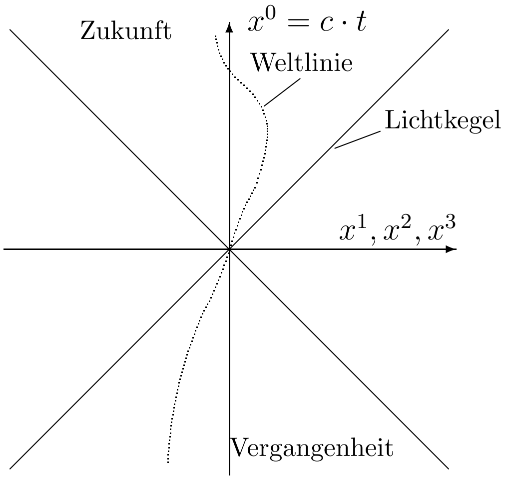

Abbildung 5.2: Zur Verdeutlichung der Begriffe „raumartig“, „zeitartig“ und „lichtartig“

Eigenzeit

Die Eigenzeit ist die Zeit, die bei einer Bewegung von einer mitbewegten Uhr gemessen wird. Man erhält sie, indem man in (5.9) $v = 0$ setzt zu

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\tau &= \frac{1}{c}\sqrt{-\,\mathrm{d}s^2} \\ \rightsquigarrow \tau &= \int_0^\tau \mathrm{d}\tau' = \int_0^t \sqrt{1-\beta^2}\,\mathrm{d}t'. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Die Weltlinie kann man allgemein in Abhängigkeit von τ schreiben: $\tau \to x^\mu(\tau)$.

Mit dieser Definition der Eigenzeit kann man nun folgendes definieren

- 4-Geschwindigkeit

$$u^\mu := \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} = \left(c \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}, \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}\tau}\right) \overset{(5.10)}{=} \left(\frac{c}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right). \tag{5.11}$$

  Es gilt: $u^2 = u_\mu u^\mu = -c^2 < 0$. Die 4-Geschwindigkeit ist also zeitartig, was sie auch sein sollte, nach den obigen Überlegungen.

- 4-Impuls

$$p^\mu = m \cdot u^\mu = \left(\frac{mc}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{m \cdot \vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = (p^0, \vec{p}). \tag{5.12}$$

  Dabei ist die Teilcheneigenschaft Masse m ein Skalar (!), also lorentzinvariant. Das Quadrat von $\underline{p}$ ergibt sich als

$$p^2 = -m^2c^2 < 0, \tag{5.13}$$

$\underline{p}$ ist also ebenfalls zeitartig.

Durch eine geeignete Lorentz-Transformatione kann man erreichen, daß die räumliche Komponente des Impulses verschwindet:

$$(p^0, \vec{p}) \xrightarrow{\Lambda} (\bar{p}^0, 0) \rightsquigarrow \bar{p}^0 = mc.$$

Das Bezugssystem, in dem dies gilt, nennt man „Ruhesystem“.

5.3.1 Bewegungsgleichungen

Die Newtonschen Bewegungsgleichungen lauten

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{F},$$

mit irgendeiner 3-dimensionalen (räumlichen) Kraft $\vec{F}$. Ausgedrückt durch die Eigenzeit τ lauten sie

$$\frac{\mathrm{d}p^k}{\mathrm{d}\tau} = \frac{F^k}{\sqrt{1-\beta^2}} =: K^k \quad \text{(3-dim.)}. \tag{5.14}$$

Analog ergibt sich die Verallgemeinerung auf 4 Dimensionen zu

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}p^\mu}{\mathrm{d}\tau} = K^\mu}. \tag{5.15}$$

Beim Wechsel des Bezugssystems (via Lorentz-Transformation) hat man zu beachten, daß sich die Impulse und damit auch die Kräft ändern, es gilt also

$$\Lambda: \; S \to S': \qquad p'^\mu \neq p^\mu \rightsquigarrow K'^\mu \neq K^\mu \quad (!)$$

Was aber gilt ist die

Kovarianz der Bewegungsgleichungen

Die Bewegungsgleichungen haben in allen IS die gleiche Form, sind also „forminvariant“ oder kovariant:

$$\Lambda: \; S \to S': \quad \frac{\mathrm{d}p^\mu}{\mathrm{d}\tau} = K^\mu \to \frac{\mathrm{d}p'^\mu}{\mathrm{d}\tau} = K'^\mu,$$

die Bewegungsgleichungen in ihrer kovarianten Form gelten also in jedem Inertialsystem.

Betrachtet man nochmals das Quadrat des 4-Impulses, so gilt (s.o.):

$$p^2 = -m^2c^2, \qquad \frac{\mathrm{d}p^2}{\mathrm{d}\tau} = 0.$$

Führt man die Ableitung aus, ergibt sich

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}p^2}{\mathrm{d}\tau} &= 2p_\mu \frac{\mathrm{d}p^\mu}{\mathrm{d}\tau} = 2p_\mu K^\mu \stackrel{!}{=} 0 \\
\rightsquigarrow p^0 K^0 &= \vec{p}\cdot\vec{K}, \quad \text{also} \\
\stackrel{(5.12)}{\rightsquigarrow} \frac{mc}{\sqrt{1-\beta^2}} K^0 &= \frac{m\vec{v}\cdot\vec{K}}{\sqrt{1-\beta^2}} \stackrel{(5.14)}{=} \frac{m\cdot\vec{v}\cdot\vec{F}}{1-\beta^2}. \\
\rightsquigarrow cK^0 &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\cdot\vec{v}\cdot\vec{F},
\end{aligned}$$

mit $\vec{v}\cdot\vec{F}$, der von $\vec{F}$ verrichteten Leistung. Es gilt also

$$\frac{\mathrm{d}p^0}{\mathrm{d}\tau} = K^0 = \frac{1}{c\cdot\sqrt{1-\beta^2}}\cdot\vec{v}\cdot\vec{F}.$$

Setzt man p^0 ein, erhält man

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = \vec{v}\cdot\vec{F}.$$

Diese Gleichung beschreibt, daß die Energiezunahme pro Zeiteinheit gegeben ist durch die von $\vec{F}$ am System verrichtet Leistung. Integriert man diese Gleichung über t für $\vec{v}(0) = 0$, so erhält man

$$\int_0^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = \underbrace{\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - mc^2}_{\text{kinetische Energie}} = \underbrace{\int_0^t \vec{F}\cdot\vec{v}\,\mathrm{d}t}_{\text{verrichtete Arbeit}} \quad . \tag{5.16}$$

Damit hat man erhalten, daß die kinetische Energie des Teilchens durch

$$E_{\text{kin}} = cp^0 - mc^2 \qquad \text{kinetische Energie} \tag{5.17}$$

gegeben ist, während

$$E := E_{\text{kin}} + mc^2 \qquad \text{Gesamtenergie} \tag{5.18}$$

die Gesamtenergie des Teilchens beschreibt. Der übriggebliebene Summand wird als Ruheenergie E_0 bezeichnet:

$$E_0 = E - E_{\text{kin}} = mc^2 \qquad \text{Ruheenergie.} \tag{5.19}$$

Unter Verwendung dieser Gleichungen läßt sich der 4-Impuls wie folgt umschreiben:

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right), \qquad p^2 = -\frac{E^2}{c^2} + \vec{p}^2.$$

Unter Benutzung von (5.13) läßt sich die letzte Gleichung umschreiben in

$$\rightsquigarrow \boxed{E^2 = m^2c^4 + \vec{p}^2c^2}, \tag{5.20}$$

die sog. „**relativistische Energie-Impuls-Beziehung**“.

Betrachtet man nochmals (5.16), so kann man im Grenzfall $v \ll c$, also $\beta \ll 1$ die Wurzel entwickeln und erhält so für die kinetische Energie

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \approx 1 + \frac{\beta^2}{2} + \cdots$$
$$\rightsquigarrow E_{\text{kin}} = mc^2\left(1 + \frac{v^2}{2c^2}\right) - mc^2 = \frac{1}{2}mv^2,$$

was man natürlich auch erwartet hat. Die Gesamtenergie lautet in diesem Fall:

$$E = \frac{p^2}{2m} + mc^2,$$

Wirken keine äußeren (4-dimensionalen) Kräfte auf das System, so ergibt sich

$$\frac{\mathrm{d}p^\mu}{\mathrm{d}\tau} = 0 \rightsquigarrow \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = 0 \rightsquigarrow \vec{p} = const,$$

Der Impuls ist also in diesem Fall konstante, die obige (räumliche) Gleichung beschreibt die Impulserhaltung. Für den zeitlichen Anteil erhält man

$$\frac{\mathrm{d}p^0}{\mathrm{d}t} = 0 \rightsquigarrow E = const,$$

also die Energieerhaltung, insgesamt beinhaltet demnach

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}p^\mu}{\mathrm{d}\tau} = K^\mu} \tag{5.21}$$

den Energiesatz.

Bei der Berechnung z.B. eines Systems aus Elektron und Proton, welche aufeinander zufliegen, erhält man, daß in jedem IS das Quadrat des Gesamtimpulses $S := P_\mu P^\mu$ invariant ist, was natürlich auch so sein sollte.

5.4 Kovariante Maxwell-Gleichungen

Aus den „normalen“ Maxwell-Gleichungen ((1.9)-(1.12) mit Zeitabhängigkeit) war man in die Lage versetzt, aus den Ladungs- und Stromdichten die Felder bzw. die Potentiale und aus denen die Felder zu berechnen. Dabei traten bisher nur 3-dimensionale (Orts)-Vektoren auf.

Die Ladungsdichte kann man einfach umschreiben, indem man die Zeit und den normalen Ortsvektor wie gehabt in eine 4-Vektor umschreibt. Die Ladungsdichte geht somit einfach über in

$$\varrho(\vec{x}, t) = \varrho(x^0, x^1, x^2, x^3) = \varrho(\underline{x}).$$

4-Strom

Genauso geht man beim Strom vor, man erhält letztlich

$$\vec{j}(\vec{x}, t) \to j^\mu(\underline{x}).$$

Es stellt sich jedoch die Frage, ob der Strom (der jetzt natürlich 4-komponentig ist, s.u.) ein „echter“ 4-Vektor ist, was sich nur testen läßt, wenn man sein Transformationsverhalten unter Lorentz-Transformationen betrachtet.

Dazu betrachtet man die Ladung, welche invariant (unabhängig vom Bewegungszustand) ist und sich wie folgt aus der Ladungsdichte ergibt:

$$q = \int \varrho(\underline{x})\, \mathrm{d}^3 x. \tag{5.22}$$

Um dies weiter berechnen zu können, betrachtet man das invariante 4-dim. Volumenelement:

$$\mathrm{d}^4 x = c \cdot\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}^3 x = \underbrace{c \cdot \frac{\mathrm{d}^3 x}{\sqrt{1-\beta^2}}}_{\text{invariant}}\, \mathrm{d}\tau.$$

Da $\mathrm{d}\tau$ invariant ist, muß auch der andere Teil des Produktes invariant sein. Erweitert man (5.22) mit 1, erhält man

$$q = \int \underbrace{\varrho(\underline{x}) \cdot \sqrt{1-\beta^2}}_{=\bar{\varrho}(\underline{x})} \frac{\mathrm{d}^3 x}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Da $\bar{\varrho}(\underline{x})$ ein Skalarfeld ist, ist es invariant. Drückt man nun den Strom durch die Ladungsdichte aus, erhält man:

$$\vec{j} = \varrho \cdot \vec{v} \leadsto (j^\mu) = \left(\frac{c \cdot \bar{\varrho}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{\bar{\varrho} \cdot \vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) =: \bar{\varrho} \cdot (u^0, \vec{v}) = \bar{\varrho} \cdot (u^\mu).$$

Die so definierte 4-Geschwindigkeit (u^μ) ist ein 4-Vektor. Daher kann (j^μ) ebenfalls nur ein 4-Vektor zu sein. Man bezeichnet

$$(j^\mu) = (c \cdot \varrho, \vec{j}) \quad \text{als „4-Strom“.}$$

Die Kontinuitätsgleichung (1.5) geht mit dieser Definition des Stroms über in:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \longrightarrow \underbrace{\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(c \cdot \varrho)}_{=\partial_0 j^0} + \partial_k j^k = 0$$

$$\rightsquigarrow \boxed{\partial_\mu j^\mu = 0}. \tag{5.23}$$

Das ist die 4-dimensionale Kontinuitätsgleichung. In der Gleichung tritt die sog. 4-Divergenz auf. Man kann aus (5.23) ablesen, daß der 4-Strom ein erhaltener Strom ist.

5.4.1 Elektromagnetische Potentiale

Die Potentiale sollen lorentz-geeicht sein (s. S. 84), so daß sich folgende Dgl. für die Potentiale (4.79) und (4.80) ergeben:

$$\Box \vec{A} = -\mu_0 \cdot \vec{j}, \tag{5.24}$$

$$\Box \phi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\varrho = -\mu_0 \cdot c^2 \cdot \varrho \tag{5.25}$$

Unter Verwendung der 0-ten Komponente des 4-Stroms ergibt sich aus der letzten Gleichung

$$\Box \left(\frac{1}{c}\phi\right) = -\mu_0 c \varrho = -\mu_0 \cdot j^0.$$

Nimmt man diese Gleichung als 0-te Komponente eines 4-dim. Vektorpotentials, erhält man letztlich

$$(A^\mu) = \left(\frac{1}{c}\phi, \vec{A}\right) \rightsquigarrow \boxed{\Box A^\mu = -\mu_0 j^\mu}. \tag{5.26}$$

(A^μ) nennt man 4-Potential . Da der d'Alembert-Operator ein skalarer Operator ist und (j^μ) ein 4-Vektor ist, ist auch (A^μ) ein 4-Vektor.

Mit diesem 4-Potential läßt sich nun die Lorentz-Bedingung der Lorentz-Eichung sehr kurz schreiben:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \longrightarrow \boxed{\partial_\mu A^\mu = 0}.$$

Aus dem Potential kann man nun wiederum die Feldstärken E und B bestimmen:

5.4.2 Feldstärken E, B

Durch Differentiation ergibt sich aus dem 4-Potential ein Tensor, der sog. „**Feldstärke-Tensor**“, der wie folgt definiert ist (ergibt sich, indem man die Ableitungsvorschriften der E- und B-Felder aus dem Potential zusammenfaßt):

$$\boxed{F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu}. \tag{5.27}$$

$(F_{\mu\nu})$ ist ein antisymmetrischer Tensor, der definitionsgemäß in der Diagonalen nur Nullen aufweist. Somit ergeben sich genau 6 unabhängige Komponenten, gerade die drei Komponenten des E- und des B-Feldes. In der 0-ten Spalte (und damit auch in der 0-ten Zeile) befinden sich die Komponenten des E-Feldes:

$$\begin{aligned} F_{k0} &= \partial_k A_0 - \partial_0 A_k = \frac{\partial}{\partial x^k}\left(-\frac{1}{c}\phi\right) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}A_k \\ &= \frac{1}{c}\left(-\frac{\partial \phi}{\partial x^k} - \frac{\partial A_k}{\partial t}\right) = \frac{1}{c}\underbrace{\left(-\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}\right)_k}_{=E_k} = \frac{1}{c}\cdot E_k \\ & \qquad\qquad (k = 1, 2, 3). \end{aligned} \tag{5.28}$$

Die drei anderen unabhängigen Komponenten ergeben sich zu

$$F_{12} = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 = (\vec{\nabla}\times\vec{A})_3 = B_3 \tag{5.29}$$

$$F_{13} = \partial_1 A_3 - \partial_3 A_1 = -(\vec{\nabla}\times\vec{A})_2 = -B_2 \tag{5.30}$$

$$F_{23} = \partial_2 A_3 - \partial_3 A_2 = (\vec{\nabla}\times\vec{A})_1 = B_1 \tag{5.31}$$

Setzt man nun den Tensor aus den Gleichung (5.29)-(5.31) zusammen, ergibt sich folgendes Bild

$$\rightsquigarrow (F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & E_1/c & E_2/c & E_3/c \\ -E_1/c & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2/c & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3/c & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.32}$$

Betrachtet man eine Raumspiegelung, so stellt man fest, daß die Komponenten des E-Feldes ihr Vorzeichen wechseln, während die Komponenten des B-Feldes invariant bleiben. Dies zeigt an, daß $\vec{B}$ ein sog. „Pseudo-Vektor“ (allg. Pseudo-Tensor) oder auch „axialer“ Vektor ist. Somit kann man das B-Feld auch kompakter in Abhängigkeit vom Feldstärke-Tensor wie folgt schreiben:

$$F_{kl} = \epsilon^{klm} B_m \rightsquigarrow B_k = \epsilon_{klm}\partial^l A^m = \frac{1}{2}\epsilon_{klm}F^{lm}.$$

Das $\frac{1}{2}$ taucht auf, da jede Ableitung in der Summation doppelt vorkommt. ϵ^{klm} ist der in (3.17) definierte total antisymmetrische Tensor in drei Dimensionen.

5.4.3 Maxwell-Gleichungen

Inhomogene Maxwell-Gleichungen

Die inhomogenen Maxwell-Gleichungen lauten (s. Kap. 1)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0} \rightsquigarrow \vec{\nabla}\left(\frac{1}{c}\vec{E}\right) = \frac{1}{c^2\varepsilon_0} c \cdot \varrho = \mu_0 j^0 \tag{5.33}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j} \tag{5.34}$$

Aus (5.33) folgt $\partial_k(F^{0k}) = \mu_0 j^0$. Nimmt man die 0-te Komponente noch hinzu, erhält man wegen $F^{00} = 0$

$$\partial_\nu F^{0\nu} = \mu_0 j^0. \tag{5.35}$$

Ähnlich geht man in (5.34) vor:

$$(\vec{\nabla} \times \vec{B})^1 = \partial_2 F^{12} + \partial_3 F^{13} + \partial_1 F^{11} = \partial_l F^{1l}$$

Den dritten Summanden kann man hinzufügen, da $F^{11} = 0$ ist. Man erhält somit für die k-te Komponente des B-Feldes

$$(\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \partial_l F^{kl}.$$

Nimmt man zu dieser Form von (5.34) ebenfalls noch F^{00} hinzu, erhält man

$$\rightsquigarrow \partial_0 F^{k0} + \partial_l F^{kl} = \mu_0 j^k$$

und damit

$$\partial_\nu F^{k\nu} = \mu_0 j^k. \tag{5.36}$$

Nimmt man Gleichung (5.35) und (5.36) zusammen, ergibt sich schließlich

$$\rightsquigarrow \boxed{\partial_\nu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\mu} \quad (\mu = 0, 1, 2, 3). \tag{5.37}$$

Diese letzte Gleichung repräsentiert die beiden inhomogenen Maxwell-Gleichungen

Homogene Maxwell-Gleichungen

Die homogenen Maxwell-Gleichungen lauten

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \Longleftrightarrow \partial_k B^k = 0 \tag{5.38}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \Longleftrightarrow \vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{c}\vec{E}\right) + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \tag{5.39}$$

Diese beiden Gleichungen kann man mit dem total antisymmetrischen Tensor 4. Stufe wie folgt ausdrücken:

$$\boxed{\epsilon^{\mu\nu\varrho\sigma}\partial_\nu F_{\varrho\sigma} = 0}, \tag{5.40}$$

wobei der total antisymmetrischen Tensor wie folgt definiert ist

$$\epsilon^{\mu\nu\varrho\sigma} = \left\{ \begin{array}{cl} 1 & \text{f. } (\mu\nu\varrho\sigma) = \text{gerade Permutation von } (0,1,2,3) \\ -1 & \text{f. } (\mu\nu\varrho\sigma) = \text{ungerade Permutation von } (0,1,2,3) \\ 0 & \text{sonst, d.h. mindestens zwei Indizes gleich} \end{array} \right\}.$$

Man kann (5.40) noch in eine zu (5.37) analoge Form überführen, indem man den „dualen Feldstärketensor“ einführt:

$$\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\varrho\sigma}F_{\varrho\sigma} =: \tilde{F}^{\mu\nu}$$

Somit ergibt sich aus (5.40)

$$\rightsquigarrow \boxed{\partial_\nu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0}. \tag{5.41}$$

Eine weitere mögliche Schreibweise dieser Gleichung zeigt

$$\boxed{\partial_\varrho F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\varrho\mu} + \partial_\mu F_{\nu\varrho} = 0}, \tag{5.42}$$

mit $\varrho \neq \mu \neq \nu \neq \varrho$.

Man kann überprüfen, daß (5.37) durch $F_{\varrho\sigma} = \partial_\varrho A_\sigma - \partial_\sigma A_\varrho$ gelöst wird. Setzt man diesen „Ansatz“ in (5.37) ein, erhält man

$$\partial_\nu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \partial^\mu(\partial_\nu A^\nu) - \underbrace{\partial_\nu\partial^\nu}_{=\Box} A^\nu = \mu_0 j^\mu.$$

Aus der Lorentz-Eichung ($\partial_\nu A^\nu = 0$) folgt aus der obigen Gl.

$$\rightsquigarrow \boxed{\Box A^\nu = -\mu_0 j^\nu},$$

was gerade die vier Gleichungen (4.79)-(4.80) für die elektromagnetischen Potentiale sind.

In diesem Abschnitt wurden die kovarianten Maxwell-Gleichungen (5.37) und (5.40) hergeleitet. Die „kovarianten“ Maxwell-Gleichungen sind die Maxwell-Gleichungen in „forminvarianter“ Schreibweise, d.h. sie sind *in dieser Form* in jedem Inertialsystem gültig:

$$S \xrightarrow{\Lambda} S' : \quad \underline{x} \to \underline{x}', j^\mu \to j'^\mu, F_{\mu\nu} \to F'_{\mu\nu}$$
$$\text{in S':} \rightsquigarrow \partial'_\nu F'^{\mu\nu} = \mu_0 j'^\mu, \quad \partial'_\nu \tilde{F'}^{\mu\nu} = 0.$$

Dies ist ein Beweis der Lorentz-Invarianz der Maxwell-Gleichungen bzw. eine „Manifestierung der Lorentz-Invarianz" der Maxwell-Gleichungen.

Ein weiterer interessanter Punkt ist das Verhalten von E- und B-Feldern unter Lorentz-Transformationen. Man erhält die Felder wie oben beschrieben aus dem Feldstärke-Tensor (s. Abschn. 5.4.2). Die Lorentz-Transformation (von S nach S') wird nun mit diesem Tensor ausgeführt und danach werden wie in 5.4.2 die Felder berechnet. Man erhält

$$\begin{aligned} \vec{E}' &= \gamma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \\ \vec{B}' &= \gamma(\vec{B} - \tfrac{1}{c^2} \cdot \vec{v} \times \vec{E}). \end{aligned} \tag{5.43}$$

Die Umkehrung erhält man, indem man einfach v durch $-v$ ersetzt. Gilt das nur für die transversalen Komponenten der Felder ?!

Gleichförmig bewegte Ladung

Es wird eine in S' ruhende (in S bewegte) Punktladung q betrachtet. Mit den Transformationsformeln (5.43) erhält man:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \gamma \vec{E}' \\ \vec{B} &= \gamma \frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E}, \end{aligned}$$

wobei $\vec{E}$ das Coulomb-Feld der Punktladung in S' ist.

5.5 Energie-Impuls-Tensor

Die Kraft die auf eine Punktladung q wirkt, lautet bei gegebenen Feldern

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}).$$

Die zugehörige räumliche Bewegungsgleichung ($\rightsquigarrow$ Newtonsche Bewegungsgleichung) lautet somit

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{F} \Longleftrightarrow \frac{\mathrm{d}p^k}{\mathrm{d}\tau} = \frac{F^k}{\sqrt{1-\beta^2}} = K^k \qquad (k = 1, 2, 3).$$

Dabei wurde die „normale" Zeit t durch die Eigenzeit τ ausgedrückt. Die letzte Gleichung kann man auch einfach durch die 4-Kraft und den Feldstärke-Tensor ausdrücken:

$$K^k = q \cdot F^{k\nu} u_\nu = q(F^{k0} u_0 + F^{kl} u_l) = q \cdot (E^k + \big(\vec{v} \times \vec{B})^k\big) \cdot \sqrt{1-\beta^2},$$

da $F^{kl}u_l = \epsilon^{klm}B_m u_l = (\vec{u}\times\vec{B})_k$. Somit ergibt sich die kovariante Bewegungsgleichung eines Teilchens im elektromagnetischen Feld zu

$$\rightsquigarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}p^\mu}{\mathrm{d}\tau} = q\cdot F^{\mu\nu}u_\nu}. \tag{5.44}$$

Sofern man eine kontinuierliche Ladungsverteilung vorgegeben hat, ergibt sich der räumliche Anteil der Kraft als

$$F^k = \int \varrho E^k + (\vec{j}\times\vec{B})^k \,\mathrm{d}^3x = \int F^{k\nu}j_\nu \,\mathrm{d}^3x \equiv \int f^k(\vec{x})\,\mathrm{d}^3x, \tag{5.45}$$

mit der Kraftdichte $\vec{f}(\vec{x})$.

Analog ergibt sich die 4-dimensionale Kraftdichte aus der „Kraftgleichung“ zu

$$\boxed{(f^\mu) = (F^{\mu\nu}j_\nu)} = (f^0, \vec{f}), \tag{5.46}$$

mit dem $\vec{f} = (f^k)$ aus (5.45). f^0 ergibt sich zu

$$f^0 = F^{0\nu}j_\nu = \frac{1}{c}\vec{E}\cdot\vec{j} = \frac{1}{c}\vec{f}\cdot\vec{v} = \frac{1}{c}\cdot\text{Leistungsdichte}.$$

Umformung der Kraftgleichung

Im folgenden wird nun die Kraftdichte in (5.46) weiter umgeformt, was letzlich auf den Energie-Impuls-Tensor führt.

$$\begin{aligned} f^\mu &\overset{(5.46)}{=} F^{\mu\varrho}j_\varrho \overset{(5.37)}{=} \frac{1}{\mu_0}F^{\mu\varrho}\partial^\nu F_{\varrho\nu} \\ &\overset{\substack{\text{Produkt}\\\text{Regel}}}{=} \frac{1}{\mu_0}\Big\{\partial^\nu\left(F^{\mu\varrho}F_{\varrho\nu}\right) - \underbrace{\left(\partial^\nu F^{\mu\varrho}\right)F_{\varrho\nu}}_{(*)}\Big\}. \end{aligned} \tag{5.47}$$

Betrachtet man den letzten Summanden (*) in (5.47), so erhält man

$$(*):\ \left(\partial^\nu F^{\mu\varrho}\right)F_{\varrho\nu} = \frac{1}{2}\big\{\left(\partial^\nu F^{\mu\varrho}\right)F_{\varrho\nu} + \left(\partial^\varrho F^{\mu\nu}\right)F_{\nu\varrho}\big\} \tag{5.48}$$

$$= \frac{1}{2}F_{\varrho\nu}\left\{\partial^\nu F^{\mu\varrho} + \partial^\varrho F^{\nu\mu}\right\} \tag{5.49}$$

$$\overset{(5.42)}{=} -\frac{1}{2}F_{\varrho\nu}\left(\partial^\mu F^{\varrho\nu}\right) = -\frac{1}{2}\frac{1}{2}\partial^\mu\left(F_{\varrho\nu}F^{\varrho\nu}\right). \tag{5.50}$$

Die Umformung von (5.48) nach (5.49) gilt, da F antisymmetrisch ist. Der Faktor 1/2 bei der letzten Umformung ensteht, um die „Integration“ zu kompensieren. Setzt man nun das „Ergebnis“ dieser letzten Umformung in (5.47) ein, erhält man

$$(5.47): \; f^\mu \overset{(5.50)}{=} \frac{1}{\mu_0}\left\{\partial^\nu\left(F^{\mu\varrho}F_{\varrho\nu}\right) + \frac{1}{4}\partial^\mu\left(F_{\varrho\nu}F^{\varrho\nu}\right)\right\}.$$

Wandelt man jetzt das ∂^μ wie folgt um

$$\partial^\mu = g^\mu{}_\nu\partial^\nu \equiv \delta^\mu{}_\nu\partial^\nu,$$

so erhält man letztlich für die Kraftdichte:

$$\rightsquigarrow f^\mu = \partial^\nu \underbrace{\frac{1}{\mu_0}\left\{F^{\mu\varrho}F_{\varrho\nu} + \frac{1}{4}g^\mu{}_\nu\left(F_{\varrho\sigma}F^{\varrho\sigma}\right)\right\}}_{=:T^\mu{}_\nu},$$

also

$$\boxed{f^\mu = \partial_\nu T^{\mu\nu}}. \tag{5.51}$$

$(T^\mu{}_\nu)$ nennt man „**Energie-Impuls-Tensor**“:

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0}\left\{F^\mu{}_\varrho F^{\varrho\nu} + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}\left(F_{\varrho\sigma}F^{\varrho\sigma}\right)\right\}. \tag{5.52}$$

Der Energie-Impuls-Tensor ist symmetrisch und seine Spur verschwindet:

$$\mathrm{Tr}(T): \quad T^\mu{}_\mu = T_\mu{}^\mu = \frac{1}{\mu_0}\left(F^\mu{}_\varrho F^\varrho{}_\mu\right) + \frac{1}{4\mu_0}\underbrace{g^\mu{}_\mu}_{=4}\left(F_{\varrho\sigma}F^{\varrho\sigma}\right) = 0.$$

Demnach bleiben neun unabhängige Komponenten des Tensors, die es im folgenden zu bestimmen gilt.

Erwähnentswert ist, daß die im Energie-Impuls-Tensor enthaltene „Größe“

$$\begin{aligned} F_{\varrho\sigma}F^{\varrho\sigma} &= F_{0k}F^{0k} + F_{k0}F^{k0} + F_{kl}F^{kl} \\ &= -\frac{1}{c^2}\vec{E}^2 - \frac{1}{c^2}\vec{E}^2 + 2\underbrace{\left(F_{12}F^{12} + F_{13}F^{13} + F_{23}F^{23}\right)}_{=\vec{B}^2} \\ &= 2(\vec{B}^2 - \frac{1}{c^2}\vec{E}^2) \end{aligned} \tag{5.53}$$

eine Invariante unter LT ist.

Die Komponente „links-oben“ des Energie-Impuls-Tensors ergibt sich unter Zuhilfenahme von (5.53) zu

$$\begin{aligned} T^{00} &= \frac{1}{\mu_0}\Big\{\underbrace{F^0{}_k F^{k0}}_{=-\frac{1}{c^2}\vec{E}^2} + \frac{1}{4}\underbrace{g^{00}}_{=-1}(\vec{B}^2 - \frac{1}{c^2}\vec{E}^2)\Big\} \\ &= -\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\mu_0 c^2}\vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0}\vec{B}^2\right\} = -\frac{1}{2}\left(\varepsilon_0\vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0}\vec{B}^2\right) \overset{(4.14)}{=} -w, \end{aligned} \tag{5.54}$$

wobei w die Energiedichte des elektromagnetischen Feldes ist.

Die Komponenten der ersten Spalte/Zeile ergeben sich zu

$$\begin{aligned} T^{0k} &= \frac{1}{\mu_0}\Big\{F^0{}_l F^{lk} + \frac{1}{4}\underbrace{g^{0l}}_{=0} 2(\vec{B}^2 - \frac{1}{c^2}\cdot\vec{E}^2)\Big\} \\ &= \frac{1}{\mu_0 c} E_l \epsilon^{klm} B_m = -\frac{1}{\mu_0 c}(\vec{E}\times\vec{B})^k = -\frac{1}{c}S^k, \end{aligned} \tag{5.55}$$

wobei $\vec{S}$ der Poynting-Vektor aus (4.15) ist.

Die räumlichen Komponenten $T^{kl} = T_{kl}$ des Energie-Impuls-Tensors erhält man zu

$$T_{kl} = \varepsilon_0 E_k E_l + \frac{1}{\mu_0}B_k B_l - \frac{1}{2}\delta_{kl}\left(\varepsilon_0\vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0}\vec{B}^2\right). \tag{5.56}$$

Den räumlichen Tensor 2. Stufe (T_{kl}) nennt man „Maxwellschen Spannungs-Tensor“. Faßt man nun (5.55), (5.54) und (5.56) zusammen, so erhält man

$$(T_{\mu\nu}) = \left(\begin{array}{c|ccc} -w & S_1/c & S_2/c & S_3/c \\ \hline S_1/c & T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ S_2/c & T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ S_3/c & T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{array}\right). \tag{5.57}$$

Betrachtet man nun wieder die Kraftgleichung (5.51), wenn man den Index $\mu = 0$ setzt, erhält man

$$\begin{aligned} &f^\mu = \partial_\nu T^{\mu\nu}, \qquad \mu = 0 \\ \rightsquigarrow &f^0 = \frac{1}{c}\vec{E}\cdot\vec{j} = \partial_0 T^{00} + \partial_k T^{0k} = -\frac{1}{c}\left(\frac{\partial w}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{S}\right). \end{aligned}$$

Multipliziert man obige Gleichung mit c, erhält man das „Poynting-Theorem“ (4.17). Anhand des Poynting-Theorems kann man erkennen, daß zur Änderung der Energie(dichte) sowohl der elektrische Energiefluß (Poynting-Vektor), als auch mechanische Energie $\varrho\cdot\vec{v}\cdot\vec{E}$ beiträgt.

Setzt man in der Kraftgleichung $\mu = k$ und integriert über ein Volumen V, so erhält man

$$\int_V f^k \, \mathrm{d}^3x = F^k = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} P^k_{\text{mech.}}. \tag{5.58}$$

$P^k_{\text{mech.}}$ ist der mechanische Gesamt-Impuls bezgl. V. Die räumliche Kraftdichte kann man mit (5.51) umschreiben in

$$f^k = \partial_\nu T^{k\nu} = \partial_0 T^{k0} + \partial_l T^{kl} \overset{(5.55)}{=} -\frac{1}{c^2}\frac{\partial S^k}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{T}^k,$$

wobei $\vec{T}^k = (T_1, T_2, T_3)$ ein räumlicher Vektor für festes $k = 1, 2, 3$ ist. Setzt man dies in (5.58) ein, erhält man

$$\int_V f^k \, \mathrm{d}^3x = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_V \frac{1}{c^2} S^k \, \mathrm{d}^3x + \int_{\partial V} \vec{T}^k \cdot \mathrm{d}\vec{o}.$$

Stellt man diese Gleichung ein wenig um, folgt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Bigg(\vec{P}_{\text{mech.}} + \underbrace{\int_V \frac{1}{c^2}\vec{S} \, \mathrm{d}^3x}_{=\text{Feldimpuls}}\Bigg)^k = \int_{\partial V} \vec{T}^k \cdot \mathrm{d}\vec{o} = \int_{\partial V} n_l T^{kl} \, \mathrm{d}o. \tag{5.59}$$

Der Feldimpuls ist also gegeben durch

$$\vec{P}_{\text{Feld}} = \int \frac{1}{c^2} \vec{S} \, \mathrm{d}^3x = \int_V \vec{g} \, \mathrm{d}^3x, \tag{5.60}$$

wobei $\vec{g} = \frac{1}{c^2}\vec{S}$ die Feld-Impulsdichte ist. Dadurch kann man auch das Oberflächenintegral interpretieren:

$$\int_{\partial V} n_l T_{kl} \, \mathrm{d}o \equiv \int_{\partial V} \vec{T}^k \cdot \mathrm{d}\vec{o}$$

beschreibt den Impulsstrom durch den Rand ∂V von V und ist daher so etwas wie die Kraft, die auf ∂V wirkt. Somit ergibt sich eine Interpretation des Maxwellschen Spanungs-Tensors, denn $\vec{T}^k \cdot \mathrm{d}\vec{o}$ ist k-te Komponenten der Kraft, die auf das Oberflächenelement $\mathrm{d}\vec{o}$ wirkt. Somit ist T^{kl} die k-te Komponente einer Kraft, die auf das Flächenelement senkrecht zur l-Richtung wirkt, also eine *Spannung*.

Der Impulssatz lautet mit den oben eingeführten Größen:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{P}_{\text{mech.}} + \vec{P}_{\text{Feld}})^k = \int_{\partial V} \vec{T}^k \cdot \mathrm{d}\vec{o}}. \tag{5.61}$$

In einem abgeschlossenen System ergibt sich

$$\lim_{\partial V \to \infty} \int_{\partial V} \vec{T}^k \cdot \mathrm{d}\vec{o} = 0,$$

so daß (5.61) übergeht in

$$\rightsquigarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{P}_{\text{mech.}} + \vec{P}_{\text{Feld}}) = 0. \tag{5.62}$$

Man kann erkennen, daß die beiden Impulse nicht getrennt erhalten sind, sondern nur die Summe der beiden, was eine gewichtiger Unterschied zur Mechanik ist!

Energie-Impuls-Tensor für Materie

Es sei noch erwähnt, daß auch für Materie einen Energie-Impuls-Tensor existiert, aus dem sich ähnliche Folgerungen ergeben: $\varrho_M(\vec{x})$ sei eine vorgegebene Massendichte. Dann kann man eine Massenelement wie folgt definieren:

$$\mathrm{d}m = \varrho_M \,\mathrm{d}^3x,$$

so, daß der mechanische Impuls durch folgende Gleichung gegeben ist:

$$\vec{P}_{\text{mech}} = \int \frac{\varrho_M \cdot \vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \,\mathrm{d}^3x = \int \vec{p}(\vec{x}) \,\mathrm{d}^3x.$$

Die mechanische Energie ergibt sich zu

$$E_{\text{mech}} = \int \frac{c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \,\mathrm{d}m = \int e_{\text{mech}} \,\mathrm{d}^3x.$$

Führt man also Abkürzung $\bar{\varrho}_M := \varrho_M \cdot \sqrt{1-\beta^2}$ ein, so ergibt sich der Energie-Impuls-Tensor f. Materie zu

$$\boxed{T^{\mu\nu} = \bar{\varrho} u^\mu u^\nu}. \tag{5.63}$$

Die Komponenten T^{0k} enthalten die Impulsdichte $\vec{p}_{\text{mech}}$, T^{00} repräsentiert die Energiedichte e_{mech}.

Die zu (5.51) analoge Kraftgleichung lautet:

$$f^\mu = -\partial_\nu T^{\mu\nu}_{(M)}. \tag{5.64}$$

Setzt man Kräftefreiheit voraus, nimmt also an, daß sowohl die elektromagnetische wie auch die mechanische Kraftdichte in (5.51) und (5.64) verschwinden, ergibt sich durch Gleichsetzen:

$$\rightsquigarrow \boxed{\partial_\nu \left\{ T^{\mu\nu}_{(F)} + T^{\mu\nu}_{(M)} \right\} = 0}. \tag{5.65}$$

Diese Gleichung beinhaltet die Energie-Impuls-Erhaltung.

Analog zum Impuls des elektromagnetischen Feldes kann man auch einen Drehimpuls des Feldes definieren:

$$\vec{L}_{\text{Feld}} = \int \vec{x} \times \frac{\vec{S}}{c^2} \, \mathrm{d}^3x = \int \vec{l}(\vec{x}) \, \mathrm{d}^3x, \tag{5.66}$$

mit der Drehimpulsdichte $\vec{l}$ des e.m. Feldes.

Aus dem Energie-Impuls-Tensor ergibt sich der Drehimpuls-Tensor:

$$M^{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{c^2}(x^\mu T^{\lambda\nu} - x^\nu T^{\lambda\mu}) \tag{5.67}$$

mit $M^{000} = M^{0kk} = 0$. Die Drehimpulsdichte ergibt sich aus dem Drehimpuls-Tensor wie folgt:

$$\vec{l} = c \begin{pmatrix} M^{023} \\ M^{031} \\ M^{012} \end{pmatrix}, \qquad l_k = \frac{c}{2}\epsilon_{klm} M^{0lm}.$$

Als **Beispiel** soll der Feldimpuls eines gleichförmig ($v = const \ll c$) bewegten Elektrons bestimmt werden.

Man benötigt zur Berechnung ein „Modell“ eines Elektrons, man geht davon aus, daß das Elektron eine Kugel mit Radius r_0 ist, auf der die Ladung e homogen auf der Oberfläche verteilt ist. Nun führt man einen Abstandsvektor $\vec{R} = \vec{x} - \vec{r}(t)$ zwischen dem Schwerpunkt des Elektrons und dem Beobachtungsort $\vec{x}$ ein. $\widehat{n}$ sei der Einheitsvektor in $\vec{R}$-Richtung und $R = |\vec{R}|$. Gemäß (5.43) erhält man die Felder zu

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{R}}{R^3} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{n}}{R^2} \\ \vec{B} &= \frac{1}{c^2}\vec{v} \times \vec{E} = \frac{e}{4\pi}\frac{\vec{v} \times \widehat{n}}{\widehat{n}^2}. \end{aligned}$$

Der Poynting-Vektor ergibt sich somit zu

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}(\vec{E} \times \vec{B}) = \frac{e^2}{16\pi^2\varepsilon_0}\frac{\widehat{n} \times (\vec{v} \times \widehat{n})}{R^4},$$

womit sich die Feld-Impulsdichte gemäß (5.60) zu $\vec{S}/c^2$ ergibt. Den Feldimpuls erhält man nun, indem man einfach über die Feldimpulsdichte integriert:

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow \vec{P}_{\text{Feld}} &= \int\limits_{R>r_0} \vec{g} \, \mathrm{d}^3x \overset{KK}{=} \frac{e^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c^2} \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_{r_0}^{\infty} R^2 \sin\theta \frac{\vec{v} - (\widehat{n} \cdot \vec{v})\widehat{n}}{R^4} \, \mathrm{d}R \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi \\ &= \vec{v} \cdot \underbrace{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r_0} \cdot \frac{2}{3}}_{=:m_e}. \end{aligned}$$

Somit ergibt sich, wenn man auf obigem Weg mal eben die Masse eines Elektrons definiert der Feldimpuls einfach zu $\vec{P} = m_e \cdot \vec{v}$. Dabei ist m_e die „elektromagnetische Masse des Elektrons“, aus der sich durch einfaches Umstellen ein Elektronenradius ergibt:

$$\rightsquigarrow r_0 = \frac{2}{3} \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 c^2 m_e} = 2,82 \cdot 10^{-15} m,$$

der sog. „klassische Elektronenradius“.

Diese „Definition“ der Elektronenmasse ist jedoch fraglich, da man aus der Elektrostatik, wenn man annimmt, daß das Elektron ein Kugel mit der homogen verteilten Oberflächenladung e ist, eine andere Masse, die elektrostatische Elektronenmasse erhält (wenn man die Feldenergie $= m_e c^2$ setzt und auflöst).

5.6 Lagrangefunktion eines e.m. Teilchens

Zur Erinnerung an Theorie A: $q_k, \dot{q}_k$ bezeichnen die verallgemeinerten Koordinaten bzw. Geschwindigkeiten, $k = 1, \dots, f$ durchläuft die Anzahl der Freiheitsgrade. Aus der zeitunabhängigen Lagrangefunktion $L(q_k, \dot{q}_k)$ ergibt sich die Wirkung wie folgt:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\big(q_k(t), \dot{q}_k(t)\big)\,\mathrm{d}t \quad \text{Wirkung.}$$

Das Hamiltonsche Prinzip besagt, daß sich die Bahnkurve eines Teilchens (oder mehrerer Teilchen) durch Minimieren der Wirkung ergibt. Man hat also die Variation der Wirkung δS zu untersuchen:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} L(q_k + \delta q_k, \dot{q}_k + \delta \dot{q}_k) - L(q_k, \dot{q}_k)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=1}^{f} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right\} \mathrm{d}t \stackrel{!}{=} 0. \end{aligned}$$

Die Randbedingung der Variation lauten: $\delta q_k(t_1) = \delta q_k(t_2) = 0$, da die gesuchte Funktion an den Randpunkten mit der „Realität“ übereinstimmen muß. Somit muß, damit die obige Gleichung erfüllt ist, die Klammer verschwinden, woraus die Euler-Lagrange-Gleichungen folgen:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \qquad (k = 1, \dots, f). \tag{5.68}$$

Betrachtet man z.B. ein geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld, so lauten die „normalen“ Bewegungsgleichungen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = q\cdot(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}). \tag{5.69}$$

Die Lagrangefunktion, die die kinetische Energie abzüglich der Wechselwirkungsenergie enthält, erhält man zu

$$L = -mc^2\sqrt{1-\beta^2} + \underbrace{q\cdot\vec{v}\cdot\vec{A}(\vec{x}) - q\cdot\phi(\vec{x})}_{=L_W}.$$

Setzt man die verallgemeinerten Koordinaten $q_k := x_k$ und $\dot{q}_k := v_k$, so ergeben sich die für die Lagrange-Gleichungen notwendigen Ableitungen zu

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial v_k} &= p_k = \frac{mv_k}{\sqrt{1-\beta^2}} + q\cdot A_k,\\
\frac{\partial L}{\partial x_k} &= -q\cdot\frac{\partial\phi}{\partial x_k} + q\cdot\vec{v}\cdot\frac{\partial\vec{A}}{\partial x_k},\\
\rightsquigarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial x_k}\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{mv_k}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) + q\cdot\left(\frac{\partial A_k}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})A_k\right).
\end{aligned}$$

Setzt man nun diese Ableitungen in die Lagrange-Gleichung ein und ersetzt sie durch die Felder

$$\rightsquigarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{mv_k}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = -q\cdot\underbrace{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_k}+\frac{\partial A_k}{\partial t}\right)}_{=-E_k} + q\cdot\underbrace{\left(\vec{v}\cdot\frac{\partial\vec{A}}{\partial x_k} - (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})A_k\right)}_{=(\vec{v}\times\vec{B})_k},$$

so stellt man fest, daß sich wieder die Bewegungsgleichungen (5.69) ergeben haben. Demnach kann man mittels des Lagrange-Formalismus (hier zwar bisher ohne „Gewinn“) derartige Problem behandeln.

Aus der Lagrangefunktion erhält man mittels einer Legendre-Transformation (eines Variablenwechsels) die „Hamiltonfunktion“

$$H = \sum_{k=1}^{f} p_k\cdot v_k - L, \tag{5.70}$$

wobei $p_k = \frac{\partial L}{\partial v_k}$ die verallgemeinerten Impulse sind. Setzt man alles ein, erhält man

$$\rightsquigarrow H = \sqrt{(\vec{p}_{\mathrm{kin}} - q\vec{A})^2c^2 + m^2c^4} + q\cdot\phi.$$

Diesen Ausdruck kann man für kleine Impulse $(\vec{p}-q\vec{A})^2 \ll m^2c^2$ entwickeln, so daß letztlich die Hamilton-Funktion eines Teilchens im elektromagnetischen Feld folgende Gestalt hat:

$$\rightsquigarrow H \approx \frac{1}{2m}(\vec{p}-q\vec{A})^2 + q\phi + mc^2 \qquad \text{f. } (\vec{p}-q\vec{A})^2 \ll m^2c^2. \tag{5.71}$$

Den Fall der bewegten Punktladung kann man als Grenzfall einer kontinuierlichen Ladungs- bzw. Stromverteilung auffassen:

$$\varrho = q\delta^3(\vec{x}-\vec{r}(t)), \qquad \vec{j} = \vec{v}\cdot\varrho,$$

so daß sich der Wechselwirkungsanteil L_W der Lagrangefunktion wie folgt ergibt:

$$\rightsquigarrow L_W = \int (\vec{j}\cdot\vec{A} - \varrho\cdot\phi)\,\mathrm{d}^3x.$$

Nimmt man zusätzlich noch die Masse kontinuierlich an:

$$m = \int \mathrm{d}m = \int \varrho_M(\vec{x})\,\mathrm{d}^3x,$$

mit der Massendichte ϱ_M, so erhält man die allgemeine Lagrangefunktion zu

$$\begin{aligned}\rightsquigarrow L &= \int \Big(\underbrace{-c^2\varrho_M\sqrt{1-\beta^2}}_{=\mathcal{L}_M} + \underbrace{\vec{j}\cdot\vec{A} - \varrho\cdot\phi}_{=\mathcal{L}_W}\Big)\,\mathrm{d}^3x \\ &= \int \Big(\mathcal{L}_M + \mathcal{L}_W\Big)\,\mathrm{d}^3x,\end{aligned}$$

wobei mit $\mathcal{L}$ die Lagrange-Dichten bezeichnet werden. Die Lagrange-Dichten sind, da aus invariante Größen zusammengesetzt, invariant unter Lorentz-Transformationen. Ebenso ist die Lagrange-Gleichung und somit auch die Wirkung eine Invariante. Im folgenden wird die Lagrange-Dichte die Rolle der normalen Lagrangefunktion übernehmen, die Bewegungsgleichungen werden nicht mehr direkt aus L, sondern aus $\mathcal{L}$ abgeleitet.

Neben der Lagrange-Dichte für die reine Wechselwirkung der Felder und der Lagrange-Dichte der Masse kann man eine Lagrange-Dichte der e.m. Felder einführen. Minimiert man mit dieser Lagrange-Dichte die Wirkung, so folgen als Bewegugsgleichung der Felder die Maxwell-Gleichungen (bei gegebenen $\varrho, \vec{j}$).
Die Lagrange-Dichte der e.m. Felder hängt vom 4-Potential und dessen Ableitung ab:

$$\mathcal{L}_F = \mathcal{L}_F(A_\nu, \partial_\nu A^\mu).$$

Außerdem weist $\mathcal{L}_F$ folgende Eigenschaften auf: sie ist lorentz- und eichinvariant und quadratisch in den Feldstärken. Setzt man z.B. wie folgt an:

$$\mathcal{L}_F = -\frac{1}{4\mu_0}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{1}{2\mu_0}\left(\vec{B}^2 - \frac{1}{c^2}\vec{E}^2\right),$$

(der Faktor $1/4\mu_0$ dient der Normierung), so ergibt sich die Wirkung zu

$$\rightsquigarrow S_F = \int \Big(-\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + j^\mu A_\mu \Big)\, \mathrm{d}^4 x.$$

Minimiert man nun die Wirkung ($\delta S = 0$), so ergeben sich als Bewegungsgleichungen der Felder die Maxwell-Gleichungen (s.u.).

5.6.1 Lagrange-Formalismus für Felder

Lagrange-Formalismus für Skalarfelder

$\varphi(\underline{x}) = \varphi(x_0, x_1, x_2, x_3)$ sei ein Skalarfeld. Führt man als verallgemeinerte Koordinaten

$$q_k \to \varphi(\underline{x}), \qquad \dot{q}_k \to \partial_\mu \varphi(\underline{x})$$

ein, so ergibt sich aus der Variation $\varphi \to \varphi + \delta\varphi$ und $\partial_\mu\varphi \to \partial_\mu\varphi + \delta\partial_\mu\varphi$ mit den Randbedingungen $\delta\varphi \to 0$ f. $x^\mu \to \infty$ ($\mu = 0, \ldots, 3$):

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int \big(\mathcal{L}(\varphi + \delta\varphi, \partial_\mu\varphi - \partial_\mu\delta\varphi) - \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu\varphi) \big)\, \mathrm{d}^4 x \\
&= \int \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}\delta\varphi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\partial_\mu\delta\varphi \right) \mathrm{d}^4 x \\
&\overset{\text{p.I.}}{=} \int \left(\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}\varphi} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} \right) \mathrm{d}^4 x \overset{!}{=} 0.
\end{aligned}$$

Daraus folgt wieder, daß (aufgrund der Randbedingungen) die Klammer verschwinden muß, so daß folgendes gelten muß:

$$\rightsquigarrow \boxed{\partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = 0}. \tag{5.72}$$

Das sind die „Feldgleichungen“ f. ein Skalarfeld.

Als **Beispiel** sei folgende Lagrangedichte für die Felder vorgegeben:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)(\partial^\mu\varphi) = \frac{1}{2}\left[-(\partial_0\varphi)^2 + (\vec{\nabla}\varphi)^2 \right] \\
&= \frac{1}{2} g^{\varrho\sigma} (\partial_\varrho\varphi)(\partial_\sigma\varphi).
\end{aligned} \tag{5.73}$$

Bildet man die nötigen Ableitungen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = 0, \qquad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} &= \frac{1}{2} g^{\varrho\sigma} \left[\delta^\mu{}_\varrho \partial_\sigma\varphi + \delta_\sigma{}^\mu \partial_\varrho\varphi \right] \\
&= \frac{1}{2}(\underbrace{g^{\mu\sigma}\partial_\sigma\varphi}_{=\partial^\mu\varphi} + \underbrace{g^{\varrho\mu}\partial_\varrho\varphi}_{=\partial^\mu\varphi}) = \partial^\mu\varphi \\
\rightsquigarrow \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} = \partial_\mu\partial^\mu\varphi &= \Box\varphi.
\end{aligned}$$

Somit ergibt sich also, wenn man Obiges in die Bewegungsgleichung (5.72) der Felder einsetzt:

$$\rightsquigarrow \Box\varphi = 0,$$

was einer Wellengleichung für φ entspricht.

Lagrange-Formalismus für Vektorfelder

Durch eine (zur Herleitung der Lagrange-Gleichungen für Skalarfelder) analoge Rechnung erhält man die Bewegungsgleichungen eines Vektorfeldes $A_\nu(\underline{x})$ aus der Lagrange-Dichte des Vektorfeldes $\mathcal{L}(A_\nu, \partial_\mu A_\nu)$ durch Minimieren der Wirkung f. jede Komponente ν (da die Variation δA_ν) untereinander unabhängig sind) zu

$$\rightsquigarrow \boxed{\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = 0}. \tag{5.74}$$

Um nun aus der Bewegungsgleichungen die Feldgleichungen (Maxwell-Gleichungen) zu erhalten, setzt man für die Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + j^\nu A_\nu \tag{5.75}$$

an, was auch dadurch etwas gerechtfertigt wird, daß die Ableitung davon 1. Ordnung in den Feldern ist, was ja auch bekanntermaßen die Feldgleichungen sind. Setzt man weiterhin den Feldstärke-Tensor wie folgt an

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \tag{5.76}$$

so erhält man sofort, daß er die homogene Maxwell-Gleichung (5.40) erfüllt:

$$\epsilon_{\mu\nu\varrho\sigma} \partial^\nu F^{\varrho\sigma} = 0 \qquad \text{hom. Maxwell-Gleichungen.}$$

Zu zeigen ist also nur, daß aus den Lagrange-Gleichungen die inhomogenen Maxwell-Gleichungen folgen. Dazu schreibt man die Lagrange-Dichte (5.75) um, indem man den „kontravarianten“ Feldstärke-Tensor durch seine kovarianten Komponenten ausdrückt:

$$\rightsquigarrow \mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu_0} g^{\alpha\varrho} g^{\beta\sigma} F_{\alpha\beta} F_{\varrho\sigma} + j^\varrho A_\varrho.$$

Die in den Lagrange-Gleichungen benötigten Ableitungen ergeben sich wie folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\nu} &= j^\nu, \\
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\mu A_\nu)} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial F_{\alpha\beta}}\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \overset{(5.76)}{=} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial F_{\alpha\beta}}\left(\delta^\mu{}_\alpha\delta^\nu{}_\beta - \delta^\mu{}_\beta\delta^\nu{}_\sigma\right) \\
&= 2\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial F_{\mu\nu}} = -\frac{1}{2\mu_0}g^{\alpha\varrho}g^{\beta\sigma}\left(\delta^\mu{}_\alpha\delta^\nu{}_\beta F_{\varrho\sigma} - \delta^\mu{}_\beta\delta^\nu{}_\sigma F_{\alpha\beta}\right) \\
&= -\frac{1}{2\mu_0}\{\underbrace{g^{\mu\varrho}g^{\nu\sigma}F_{\varrho\sigma}}_{=F^{\mu\nu}} + \underbrace{g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}F_{\alpha\beta}}_{=F^{\mu\nu}}\} = -\frac{1}{\mu_0}F^{\mu\nu} \\
&= \frac{1}{\mu_0}F^{\nu\mu}.
\end{aligned} \tag{5.77}$$

Setzt man dies nun in die Lagrange-Gleichungen ein, erhält man

$$\rightsquigarrow \partial_\mu\left(\frac{1}{\mu_0}F^{\nu\mu}\right) - j^\nu = 0,$$

woraus man durch einfaches Umstellen die inhomogenen Maxwell-Gleichungen (5.35) erhält

$$\rightsquigarrow \partial_\mu F^{\nu\mu} = \mu_0 j^\nu \qquad \text{inhom. Maxwell-Gleichungen.}$$

Somit ist also nachgewiesen, daß aus der Lagrange-Dichte in (5.75) die „richtigen“ elektromagnetischen Wechselwirkungen folgen.

Es stellt sich nun die Frage nach der Eichinvarianz dieser Lagrange-Dichte. Der Anteil $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ ist wegen (5.76) konstruktionsbedingt eichinvariant, aber der Stromanteil enthält ebenfalls das Vektorpotential A_μ, dessen Eichung sich hier jedoch nicht heraushebt.

Man führt eine Eichtransformation durch:

$$A_\mu \to A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\lambda, \tag{5.78}$$

mit einer skalaren Funktion $\lambda(\underline{x})$. Betrachtet man nun die Wirkung (welche invariant unter einer Eichtransformation bleiben muß), so erhält man

$$S \to S + \int j^\mu(\partial_\mu\lambda)\,\mathrm{d}^4x = S + \delta S.$$

Der Summand δS muß demnach verschwinden. Das kann man zeigen, indem man die Produktregel anwendet, wodurch sich folgendes ergibt:

$$\delta S = -\int \lambda\underbrace{(\partial_\mu j^\mu)}_{\overset{(*)}{=}0}\,\mathrm{d}^4x + \underbrace{\int \partial_\mu(\lambda j^\mu)\,\mathrm{d}^4x}_{\overset{(**)}{=}\int\lambda j^\mu\,\mathrm{d}\sigma_\mu = 0}.$$

Die 4-Divergenz des Stromes (∗) verschwindet, da der elektromagnetische Strom erhalten sein soll. Desweiteren wurde ein 4-dimensionaler Satz von Gauß (s. (1.15)) für die Umformung (∗∗) benutzt (dabei ist $\mathrm{d}\sigma_\mu$ das 4-dim. Flächenelement). Das entstandene Oberflächenintegral verschwindet, da sich die Volumenintegration über den gesamten Raum erstreckte und somit die Oberfläche ebenfalls im Unendlichen liegt, wo aber die Funktion λ verschwinden muß, um die Randbedingungen der Variation einzuhalten.

Es wurde also gezeigt, daß aus der Erhaltung des 4-Stroms die Eichinvarianz der Wirkung und damit der Lagrange-Dichte folgt. Die Lagrange-Dichte ist somit eindeutig bis auf einen Zusatz der Art

$$\mathcal{L} \to \mathcal{L} + \delta\mathcal{L} = \mathcal{L} + j^\mu(\partial_\mu \lambda),$$

der jedoch physikalisch irrelevant ist, da er bei der Aufstellung der (physikalischen) Bewegungsgleichungen herausfällt.

Es gilt aber auch die Umkehrung, aus der Forderung nach Eichinvarianz der Wirkung folgt die Stromerhaltung $\partial_\mu j^\mu = 0$.

Die Eichtransformationen bilden eine Gruppe, die sog. Invarianzgruppe $U(1)$. Dies ist eine unitäre Gruppe mit den Elementen

$$U(\lambda) = e^{i\lambda}, \qquad U^{-1}(\lambda) = U^*(\lambda).$$

Das „∗“ markiert wieder das komplex Konjugierte. Mittels dieser Definition kann man die Eichtransformation (5.78) auch wie folgt schreiben:

$$A_\mu \to A'_\mu = U^{-1} A_\mu U + \frac{1}{i} U^{-1} \partial_\mu U. \tag{5.79}$$

Für ein rein ortsabhängiges $\lambda = \lambda(\underline{x})$ spricht man von einer „lokalen Symmetrie“.

Dieser Aspekt wird nochmals bei der Behandlung des komplexen Feldes aufgegriffen.

5.6.2 Hamilton-Funktion

Aus der Lagrange-Funktion ergibt sich in der Punktmechanik die Hamiltonfunktion durch eine Legendre-Transformation, man ersetzt die Geschwindigkeit $\dot{q}$ durch die kanonischen Impulse $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ und stellt die Hamilton-Funktion auf:

$$H = \sum_{k=1}^{n} p_k \dot{q}_k - L,$$

wobei n die Anzahl der Freiheitsgrade angibt. Analog zur Lagrange-Dichte, ergibt sich in der Feldtheorie die Hamiltonfunktion aus der Hamilton-Dichte

$$H = \int \mathcal{H}(\vec{x})\, \mathrm{d}^3x.$$

Für Skalarfelder ergibt sich aus der Lagrange-Dichte $\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi)$ der kanonische Feldimpuls Π analog zur Mechanik zu

$$\Pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \varphi)}. \tag{5.80}$$

Damit ergibt sich die Hamilton-Dichte zu

$$\rightsquigarrow \mathcal{H} = \Pi(\partial_0 \varphi) - \mathcal{L}.$$

Analog erhält man die Hamilton-Dichte für Vektorfelder zu

$$\boxed{\mathcal{H} = (\partial_0 A_\nu) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\nu)} - \mathcal{L}}.$$

Das Problem des Hamilton-Formalismus besteht allerdings darin, daß die Hamilton-Dichte nicht mehr lorentz-invariant ist, also bei jedem Wechsel des Bezugsystems neu bstimmt werden muß, was daran liegt, daß der kanonische Impuls zu A_0 nicht definiert ist.

Geht man nochmals von der Lagrange-Dichte für elektromagnetische Felder (5.75) aus, erhält man (zur Bestimmung von $\mathcal{H}$)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\nu)} &= \frac{1}{\mu_0} F^{\nu 0}, \\
\rightsquigarrow (\partial_0 A_\nu) \frac{1}{\mu_0} F^{\nu 0} &= \frac{1}{\mu_0} (\partial_0 A_k) F^{k0} = \frac{1}{\mu_0} \left(-\frac{E_k}{c} - \frac{1}{c} \partial_k \phi \right) \left(-\frac{E^k}{c} \right) \\
&= \varepsilon_0 \left(\vec{E}^2 + \vec{E} \cdot \vec{\nabla} \phi \right).
\end{aligned}$$

Mit (5.53) ergibt sich die Hamilton-Dichte zu

$$\rightsquigarrow \mathcal{H} = \underbrace{\frac{1}{2} \left(\varepsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \vec{B}^2 \right)}_{\stackrel{(4.14)}{=} w(\vec{x})} - j^\nu A_\nu + \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{\nabla} \phi. \tag{5.81}$$

$w(\vec{x})$ ist die Energie-Dichte des Feldes. Der letzte Summand ergibt sich aufgrund des Fehlens des kanonischen Impulses von A_0 und ist verantwortlich dafür, daß $\mathcal{H}$ nicht lorentz-invariant ist. Berechnet man die Hamilton-Funktion nur für diesen Summanden, ergibt sich (wiederum durch Anwenden der Produktregel)

$$\begin{aligned}
H &= \int \mathcal{H} \, \mathrm{d}^3 x; \\
\int \varepsilon_0 (\vec{E} \cdot \vec{\nabla} \phi) \, \mathrm{d}^3 x &= \varepsilon_0 \underbrace{\int \vec{\nabla} (\vec{E} \cdot \phi) \, \mathrm{d}^3 x}_{\stackrel{(1.15)}{=} \int \vec{E} \cdot \phi \, \mathrm{d}\vec{\sigma} = 0} - \varepsilon_0 \int \underbrace{(\vec{\nabla} \cdot \vec{E})}_{\stackrel{(1.9)}{=} \varrho / \varepsilon_0} \cdot \phi \, \mathrm{d}^3 x = \int \frac{\varrho}{c} \cdot \frac{\phi}{c} \varepsilon_0 \, \mathrm{d}^3 x \\
&= \int j^0 A_0 \, \mathrm{d}^3 x.
\end{aligned}$$

Somit hat sich also ergeben, daß der Term

$$\vec{E} \cdot (\vec{\nabla}\phi) = \varrho \cdot \phi$$

die (statische) Coulomb-WW beschreibt. Damit entfällt also in (5.81) die Zeitkomponente im mittleren Summanden und man erhält:

$$\rightsquigarrow H = \int \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0}\vec{B}^2\right) - \vec{j} \cdot \vec{A} \, \mathrm{d}^3 x. \tag{5.82}$$

(Die Coulomb-WW, die, wie beschrieben, durch den dritten Summanden in (5.81) herausgenommen wurde, ist implizit im $\vec{E}^2$ enthalten.) Liegt ein freies Feld vor, so geht die Hamilton-Funktion in die Gesamtenergie des Feldes über, da dann die Hamilton-Dichte allein durch die Energie-Dichte gegeben ist.

5.7 Wechselwirkende Felder, Ströme, Eichinvarianz

Aufpassen auf Faktor c ?!

5.7.1 Freies Skalarfeld

Liegt ein freies, reelles Skalarfeld $\varphi(\underline{x})$ vor, so folgt aus der zugehörigen Lagrange-Dichte gemäß (5.73)

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)(\partial^\mu \varphi)$$

(s. S. 136) die Bewegungsgleichung

$$\Box \varphi = 0,$$

welche die Ausbreitung eines freien Feldes beschreibt. Sie heißt demnach auch „freie Feldgleichung“ und hat als Lösungen (s. Abschn. 4.2) Superpositionen von ebene Wellen der Form

$$\varphi_k = a_k \cdot e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)} = a_k \cdot e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - k_0 x^0)} = a_k \cdot e^{i(\underline{kx})},$$

wobei sich das $\underline{kx} := k_\mu x^\mu$ als 4-Skalarprodukt ergibt. Somit erhält man die allgemeine Lösung mittels Fourier-Transformation zu

$$\rightsquigarrow \varphi(\underline{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int a(k) \cdot e^{ikx} \, \mathrm{d}^3 k.$$

Obige Feldgleichung ist homogen. Liegt eine Inhomogenität j vor:

$$\rightsquigarrow \Box\varphi = -j, \tag{5.83}$$

so bezeichnet man dies als „Ankopplung" der Feldgleichung an die Quelle j. j ist ein skalarer „Strom". Die zu (5.83) zugehörige Lagrange-Dichte hat die Form $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 - j\varphi$.

Die Lösung der angekoppelten Gleichung ergibt sich aus der retardierten (avancierten) Greenschen Funktion (s. Abschn. 4.5). Für eine zeitunabhängige Inhomogentiät $j = j(\vec{x})$ ergibt sich aus (5.83) ein Poisson-Gleichung:

$$\rightsquigarrow \Delta\varphi = -j(\vec{x}') \rightsquigarrow \varphi(\vec{x}) = \int j(\vec{x})G(\vec{x}-\vec{x}')\,\mathrm{d}^3x',$$

mit der bekannten Greenschen Funktion der Poisson-Gleichung (2.16)

$$G(\vec{x}-\vec{x}') = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|},$$

dem „Coulomb-Potential" (mit $q = 1$).

5.7.2 Massives Skalarfeld

Es sei wiederum ein reelles Skalarfeld $\varphi(\underline{x})$ vorgegeben, die Lagrange-Dichte habe jedoch folgende Form:

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)(\partial^\mu\varphi) + \frac{m^2}{2}\varphi^2. \tag{5.84}$$

Dann ergibt sich als Feldgleichung aus den Lagrange-Bewegungsgleichungen

$$\rightsquigarrow (\Box - m^2)\varphi = 0. \tag{5.85}$$

Diese Gleichung taucht in der Quantenmechanik wieder als Klein-Gordon-Gleichung auf (mit anderem Vorzeichen, daß sich aber durch die Definition des metrischen Tensors erklären läßt).

Setzt man als Lösung wieder wie beim freien Feld ebene Wellen an

$$\varphi_k = a_k \cdot e^{i\underline{kx}},$$

mit dem oben definierten 4-Skalarprodukt $\underline{kx}$, erhält man durch Einsetzen in die Dgl.

$$\begin{aligned} &\rightsquigarrow (\vec{k}^2 + (k^0)^2 + m^2)a_k e^{i\underline{kx}} = 0 \\ &\rightsquigarrow \boxed{(k^0)^2 = \vec{k}^2 + m^2}. \end{aligned}$$

Dies ist ein Analogon zur Energie-Impuls-Relation für ein massives Teilchen der Masse m mit dem 4-Impuls (p^μ):

$$(p^0)^2 = \vec{p}^2 + m^2.$$

Daher kommt der Name „massives Feld". In der Quantenfeldtheorie ist durch $\mathcal{L}_0$ ein System festgelegt, welches aus freien Teilchen der Masse m (mit Spin 0, da es ein einkomponentiges Feld, also eine Skalarfeld ist) besteht. Diese Teilchen nennt man „Bosonen".

Führt man nun wieder wie oben die Ankopplung an eine Quelle j aus, so erhält man als Lagrange-Dichte wieder $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 - j\varphi$ und damit aus den Lagrange-Gleichungen als Feldgleichung

$$\boxed{(\Box - m^2)\varphi = -j}.$$

Es soll der Einfachheit halber wiederum nur der statische Fall betrachtet werden und mit dem Fall des freien Feldes verglichen werden. Man bestimmt die zugehörige Greensche Funktion, die laut Definition folgende Gleichung erfüllen muß:

$$(\Delta - m^2)G(\vec{x} - \vec{x}') = -\delta^3(\vec{x} - \vec{x}'). \tag{5.86}$$

(Man beachte, daß obige Gleichung fast (bis auf ein Minuszeichen) eine Helmholtz-Gleichung ist!) Hat man diese Greensche Funktion bestimmt, so erhält man φ aus der Wichtung der Inhomogenität mit der Greenschen Funktion wie immer zu

$$\varphi(\vec{x}) = \int G(\vec{x} - \vec{x}')j(\vec{x})\,\mathrm{d}^3x.$$

Die Greensche Funktion ergibt sich nach einiger Rechnerei (via Residuensatz) zu

$$\boxed{G(\vec{x} - \vec{x}') = \frac{1}{4\pi}\frac{e^{-m|\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x} - \vec{x}'|}}, \tag{5.87}$$

dem „Yukawa-Potential". Dies ist fast ein Coulomb-Potential, das jedoch durch die e-Funktion, die die Masse m beinhaltet, stark gedämpft wird. Dadurch wird das langreichweitige Coulomb-Potential stark abgeschirmt und hat eine endliche Reichweite.

Das Yukawa-Potential ist z.B. nützlich für ein Modell zur Beschreibung von Kernkräften.

5.7.3 Komplexes Skalarfeld

Sei φ ein komplexes Skalarfeld (mit dem konjugiert Komplexen φ^*). Dann erhält man als Verallgemeinerung von (5.84)

$$\mathcal{L}_0 = (\partial_\mu\varphi)^*(\partial^\mu\varphi) + m^2\varphi^*\varphi = \sum_{j=1}^{2}\left\{\frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi_j)(\partial^\mu\varphi_j) + \frac{m^2}{2}\varphi_j^2\right\}. \tag{5.88}$$

Dabei ist $\varphi_1 = \Re(\varphi)$ und $\varphi_2 = \Im(\varphi)$. Aus der Variaton von φ und φ^* erhält man die beiden Feldgleichungen:

$$(\Box - m^2)\varphi = 0, \qquad (\Box - m^2)\varphi^* = 0. \tag{5.89}$$

Man führt nun zunächst formal eine Größe ein, die man als „Strom“ bezeichnet:

$$j^\mu = i(\varphi^* \partial^\mu \varphi - \varphi \partial^\mu \varphi^*), \tag{5.90}$$

welcher wegen

$$\begin{aligned} \partial_\mu j^\mu &= i[(\partial_\mu \varphi^*)(\partial^\mu \varphi) + \varphi^* \Box \varphi - (\partial_\mu \varphi)(\partial^\mu \varphi^*) - \varphi \Box \varphi^*] \\ &\overset{(5.89)}{=} i[m^2 \varphi^* \varphi - m^2 \varphi \varphi^*] = 0 \end{aligned}$$

erhalten ist. Es stellt sich jedoch die Frage, ob durch (5.90) überhaupt ein sinnvoller elektromagnetischer Strom eingeführt wurde. Dazu berechnet man erst einmal die Ladung aus diesem 4-Strom:

$$Q = \frac{1}{c} \int j^0(\vec{x})\, \mathrm{d}^3 x,$$

und differenziert diese nach der Zeit:

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} \overset{(1.5)}{=} -\int \vec{\nabla} \cdot \vec{j}\, \mathrm{d}^3 x \overset{(1.15)}{=} -\lim_{\partial V \to \infty} \int_{\partial V} \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{o} = 0,$$

wodurch gezeigt ist, daß die Ladung Q erhalten ist, sofern $\vec{j}$ ein Strom ist, der die Kontinuitätsgleichung erfüllt. Es stellt sich nun die Frage, ob Q die elektromagnetische Ladung des Feldes ist, was im folgenden angenommen wird. Es sei nun φ ein komplexes Skalarfeld mit der Ladung $Q = e$ und demgemäß φ^* das konjugiert Komplexe mit der Ladung $Q = -e$. Man hat nämlich zwei Freiheitsgrade (den Real- und den Imaginärteil der Felder), welche gerade den Ladungen $\pm e$ entsprechen.

Die Ladungserhaltung ergibt sich auch aus der Symmetrie der Lagrange-Dichte des Feldes. Denn wenn man auf φ eine sog. „Phasen-Transformation“ ausführt:

$$\varphi \to \varphi' = \varphi \cdot e^{i\alpha} \leadsto \varphi'^* = \varphi \cdot e^{-i\alpha}, \tag{5.91}$$

so bleibt die Lagrange-Dichte (5.88) invariant, da sich der Phasenfaktor gerade heraushebt. Diese Phasen-Transformationen bilden die kontinuierliche Symmetriegruppe $U(1)$. Aus dem Noether-Theorem folgt aus einer Symmetrie eine Erhaltungsgröße, welche in diesem Fall der Stromerhaltung eines Stroms j^μ entspricht:

$$\leadsto \text{Noether:} \quad \partial_\mu j^\mu = 0. \tag{5.92}$$

Führt man die (im Noether-Theorem enthaltene) Variation explizit durch, erhält man

$$\delta \mathcal{L} = \mathcal{L}[\varphi + \delta\varphi] - \mathcal{L}[\varphi] \overset{!}{=} 0,$$

Aus dieser Invarianz von $\mathcal{L}$ erhält man den erhaltenen Strom: Die Variation von φ ergibt sich (durch Entwickeln der e-Funktion) zu

$$\delta\varphi = [1 + i\alpha + O(\alpha^2)]\varphi - \varphi = i\alpha\varphi, \quad \delta\varphi^* = -i\alpha\varphi^*,$$

womit man die Variation von $\mathcal{L}$ wie folgt erhält:

$$\begin{aligned} 0 &= \delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}\delta\varphi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\delta(\partial_\mu\varphi) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^*}\delta\varphi^* - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi^*)}\delta(\partial_\mu\varphi^*) \\ &= i\alpha\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}\varphi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\partial_\mu\varphi - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^*}\varphi^* - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi^*)}\partial_\mu\varphi^*\right] \\ &= \alpha\partial_\mu \underbrace{i\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\varphi - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi^*)}\varphi^*\right]}_{=:-j^\mu:\ \text{erhaltener Strom}}. \end{aligned}$$

Bei der letzten Umformung wurden wiederum die Feldgleichungen (5.89) benutzt.

Man beachte, daß es sich bei der obigen Symmetrie nicht um eine „lokale Symmetrie“ handelt (im Gegensatz zur Eichsymmetrie des Maxwell-Feldes (s. S. 139), was bedeutet, daß hier das α in diesem Fall *nicht* vom Ort $\underline{x}$ abhängen darf, da ansonsten bei der Transformation des $\mathcal{L}$ noch unerwünschte Zusatzterme übrig bleiben würden.

Es ist aber möglich, diese Lagrange-Dichte invariant unter lokalen Eichtransformationen zu machen, indem man die „normale“ Ableitung ∂_μ durch die „kovariante“ Ableitung ersetzt:

$$\partial_\mu \to \partial_\mu - iA_\mu =: D_\mu. \tag{5.93}$$

Mit kovariant ist dabei *eich*kovariant gemeint. Die kovariante Ableitung D_μ ist zu unterscheiden von der Ableitung nach den kovarianten Komponenten der Tensoren (∂_μ)!

Die Lagrange-Dichte nimmt nunmehr folgende Form an:

$$\rightsquigarrow \mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu_0}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \underbrace{(D_\mu\varphi)^*(D^\mu\varphi)}_{=(*)} + m^2\varphi^*\varphi, \tag{5.94}$$

womit sie, wie bereits erwähnt, invariant unter lokalen Eichtransformationen ist:

$$\varphi \to \varphi' = e^{i\alpha(\underline{x})}\varphi, \qquad A_\mu \to A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\alpha(\underline{x}).$$

Der erste und der letzte Summand in (5.94) sind konstruktionsbedingt eichinvariant, es muß nur gezeigt werden, daß der mittlere Summand $(*)$ ebenfalls invariant bleibt, was aber durch Ansetzten der Phasen-Transformation leicht folgt.

Rechnet man nun die lokal-eichinvariante Lagrange-Dichte etwas aus, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (\partial_\mu\varphi)^*(\partial^\mu\varphi) + m^2\varphi^*\varphi + \underbrace{[i(\varphi^*\partial^\mu\varphi - \varphi\partial^\mu\varphi^*) - i(\varphi\varphi^*A^\mu)]}_{=j^\mu\ \text{e.m. Strom}}A_\mu \\ &= \mathcal{L}_{\text{frei}} + j^\mu A_\mu. \end{aligned} \tag{5.95}$$

Die Lagrange-Dichte ist also aufgebaut aus einem „freien“ und einem Wechselwirkungsterm.

Aus diesen Überlegungen folgt, daß j^μ tatsächlich ein elektromagnetischer Strom ist.

Die Lagrange-Dichte in (5.95) beschreibt also die elektromagnetische Wechselwirkung eines (geladenen) Skalarfeldes (mit Masse m, Ladung e und Spin 0) mit einem elektromagnetischen Potential.

Esrsetzt man das Skalarfeld durch ein Feld, welches die Dirac-Gleichung (relativistische Schrödinger-Gleichung) erfüllt, einem sog. „Spinor-Feld“, so erhält man die Wechselwirkung zwischen Elektronen bzw. Positronen mit einem e.m. Feld.

5.7.4 Verallgemeinerung auf Multipletts von Skalarfeldern

$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ seien Skalarfelder. Dann definert man

$$\Phi := \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix}, \ \partial_\mu \Phi := \begin{pmatrix} \partial_\mu\varphi_1 \\ \partial_\mu\varphi_2 \\ \vdots \\ \partial_\mu\varphi_n \end{pmatrix}, \ \Phi^+ = (\Phi^T)^*, \ \partial_\mu \Phi^+ = \left((\partial_\mu \Phi)^T\right)^*. \tag{5.96}$$

(Das „+“ bedeutet „adjungiert“.)

Die Verallgemeinerung der Lagrange-Dichte (5.88) lautet nun

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 &= (\partial_\mu \Phi)^+(\partial^\mu \Phi) + m^2 \Phi^+ \Phi \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left\{ (\partial_\mu \varphi_k)^* (\partial^\mu \varphi_k) + m^2 |\varphi_k|^2 \right\}, \end{aligned} \tag{5.97}$$

woraus sich die Feldgleichungen wie folgt ergeben:

$$\rightsquigarrow (\Box - m^2)\varphi_k = 0, \qquad k = 1, \ldots, n. \tag{5.98}$$

Weiterhin existiert eine zu (5.91) verallgemeinerte Symmetrie von $\mathcal{L}_0$, welche durch die Symmetriegruppe $U(n)$, der Gruppe der unitären $n \times n$-Matrizen beschrieben wird. (Unitäre Matrix bedeutet: $U^{-1} = U^+, U^+ = (U^T)^*$.)

Die Lagrange-Dichte bleibt somit invariant unter folgenden (Eich-)Transformationen des Multipletts Φ:

$$\Phi \rightarrow \Phi' = U\Phi.$$

Dies wird gezeigt, indem man die Transformation ansetzt und die benötigten Terme der Lagrange-Dichte bestimmt:

$$\begin{aligned} \Phi^+ &= \Phi'^+ = (U\Phi)^+ = \Phi^+ U^+ = \Phi^+ U^{-1} \\ \rightsquigarrow \Phi^+ \Phi' &= \Phi^+ \underbrace{U^{-1} U}_{=I} \Phi = \Phi^+ \Phi. \end{aligned}$$

Analog verfährt man mit den Termen, die die „normalen" partiellen Ableitungen enthalten und zeigt somit die Invarianz von Φ unter obigen Transformationen.

Wie im vorigen Abschnitt stellt sich nun die Frage, ob die Symmetrie lokal ist, was wiederum nicht ohne leichte Modifikationen zutrifft. Man muß wiederum die kovarianten Ableitungen einführen und erhält damit eine invariante Lagrange-Dichte, was im folgenden geschehen soll.

Aus der Linearen Algebra erhält man, daß die Elemente der Symmetrie-Gruppe $U(n)$ ($n \times n$-Matrizen) folgende Form haben:

$$U = \underbrace{e^{i\alpha}}_{\in U(1)} \cdot \underbrace{e^{i\cdot\left(\sum\limits_{a=1}^{N} \theta_a T_a\right)}}_{\in SU(n)}, \tag{5.99}$$

dabei sind $\alpha, \theta_1, \ldots, \theta_n \in \mathbf{R}$ und $T_1, \ldots, T_N$ selbstadjungierte $n \times n$-Matrizen, für die also gilt $T_a^+ = T_a$. Die Gruppe $SU(n)$ bezeichnet man als spezielle unitäre Gruppe , deren Elemente M zusätzlich die Bedingung $\det M = 1$ erfüllen. Die Matrix-Exponentialfunktion ist (wie in Analysis) über die Potenzreihe der Exponentialfunktion definiert:

$$e^A = I + A + A^2/2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}. \tag{5.100}$$

N, die obere Grenze der Summen in (5.99) ergibt sich aus der Dimension der Matrix (n) zu $N = n^2 - 1$. N beschreibt die Anzahl der unabhhängigen Matrizen in $SU(n)$.

Für $n = 2$ erhält man demnach drei Matrizen, die sog. „Pauli-Matrizen" σ_a:

$$n = 2 \rightsquigarrow T_a = \sigma_a : \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Man kann nun analog zum einfachen Skalarfeld, wie bereits angedeutet, eine lokale Symmetrie (der Lagrange-Dichte aus (5.97)) erzeugen, wobei die reellen Zahlen θ_a aus (5.99) die Ortsabhängigkeit beeinhalten würden:

$$\theta_a \to \theta_a(\underline{x}), \qquad a = 1, 2, \ldots, N,$$

womit dann die lokale Symmetriegruppe $U(\underline{x})$ wie folgt definiert wäre (gemäß (5.100)):

$$U(\underline{x}) = I + i \sum_{a=1}^{N} \theta_a(\underline{x}) T_a + \cdots$$

Das Skalarfeldmultiplett Φ würde sich gemäß

$$\Phi \to \Phi' = U(\underline{x})\Phi,$$

und die normalen Ableitungen würden in die kovarianten analog (5.93) übergehen:

$$D_\mu = \partial_\mu - i \sum_{a=1}^{N} T_a W_\mu^a .$$

Unter diesen Voraussetzungen bleibt die Lagrange-Dichte bei lokalen Transformationen invariant:

$$\partial_\mu \Phi \to D_\mu \Phi \rightsquigarrow (D_\mu \Phi)^+ (D^\mu \Phi) \quad \text{ist invariant.}$$

Die Eichtransformationen (5.79) haben nun folgende verallgemeinerte Form:

$$\Phi \to \Phi' = U(\underline{x})\Phi, \quad W_\mu \to W'_\mu = U^{-1} W_\mu U + \frac{1}{i} U^{-1} \partial_\mu U, \tag{5.101}$$

wobei mit

$$\left(W_\mu := \sum_{a=1}^{N} W_\mu^a T_a \right)$$

N Vektorpotentiale eingeführt werden, die sich aus der Verallgemeinerung von (5.93) ergeben.

Aus der nun entstandenen eichinvarianten Lagrange-Dichte $\mathcal{L}$ erhält man nun via Noethertheorem als Verallgemeinerung von (5.95), daß es N Ströme bei N Potentialen gibt, die erhalten sind:

$$(D_\mu \Phi)^+ (D^\mu \Phi) \to (\partial_\mu \Phi)^+ (\partial^\mu \Phi) + \sum_{a=1}^{N} j_a^\mu W_\mu^a \rightsquigarrow \partial_\mu j_a^\mu = 0.$$

Feldanteil der Vektorpotentiale W_μ^a

Der Wechselwirkungsanteil der Lagrange-Dichte ergibt sich als

$$\mathcal{L}_W = -\frac{1}{4} \sum_{a=1}^{N} F_{\mu\nu}^a F^{a,\mu\nu}$$

wobei der Feldstärke-Tensor nun folgende Form hat:

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + \sum_{a=1}^{N} f_{abc} W_\mu^b W_\nu^c . \tag{5.102}$$

Die Zahlen f_{abc} sind von der Symmetriegruppe abhängig. Man nennt sie „Strukturkonstanten". Bei $SU(2)$ ergeben sich sich gerade als Komponenten des total-antisymmetrischen Tensors ϵ_{abc}.

Anhand von Gl. (5.102) kann man erkennen, daß im Gegensatz zur bisherigen Abhandlung von Feldern die Potentiale untereinander wechselwirken, was im folgenden anhand der Symmetriegruppen $SU(2)$ und $SU(3)$ kurz benannt werden soll.

$SU(2)$ Die Potentiale $W_\mu^{1,2,3}$ ergeben sich als Linearkombination der Vektorpotentiale W_μ^+, W_μ^- und Z_μ. Die Wechselwirkung wird durch folgende Terme beschrieben:

$$\mathrm{WW} \sim j_+^\mu W_\mu^+ + j_-^\mu W_\mu^- + j_0^\mu Z_\mu,$$

„Wie man leicht sieht", beschreibt die Gruppe $SU(2)$ also die schwache Wechselwirkung, also z.B. einen β-Zerfall, bei dem eine Elektron und ein (Anti-)Neutrino ensteht. Aufgrund von $n = 2$ sind zwei Freiheitsgrade gegeben, die z.B. gerade das Elektron und das Neutrino repräsentieren. Die Vektorpotential $W_\pm^\mu, Z^\mu$ beschreiben die Bosonenfelder der schwachen WW.

$SU(3)$ In diesem Fall erhält man wegen $N := n^2 - 1$ acht Potentiale W_μ^a, welche eine Wechselwirkung der Art

$$\mathrm{WW} \sim \sum_{a=1}^{8} j_a^\mu W_\mu^a$$

beschreiben, z.B. die starke WW. Die drei Freiheitsgrade beschreiben ein Quarktriplett (rot, grün, blau), aus welchem sich eine Strom j_a^μ, der sog. Quarkstrom ergibt. Die Vektorpotentiale beschreiben „Gluon-Felder".

Zum Schluß seien die Vorteile der Lagrange-Formulierung für Felder nochmals zusammengefaßt:

- Die Grundlage ist ein universelles Prinzip (das Hamiltonsche Prinzip der Minimierung der Wirkung), welches sowohl in der Mechanik, als auch in der Feldtheorie sein Gültigkeit und Berechtigung hat.
- Die Lagrange-Dichte $\mathcal{L}$ und die Wirkung S sind Lorentz-Skalare, aus denen somit kovariante Bewegungsgleichungen folgen. Aufgrund dieser Tatsache ist also die Lorentz-Invarianz manifest.
- Die Lagrange-Dichte enthält die *gesamte* Dynamik des physikalischen Systems und ist übertragbar auf mikroskopische Systeme.
- Die Lagrange-Dichte $\mathcal{L}$ ist Ausgangspunkt der Quantenfeldtheorie (z.B. Quantenelektrodynamik).
- Außerdem ist das Konzept der Lagrange-Dichte verallgemeinerbar auf andere fundamentale Wechselwirkungen (starke, schwache, Gravitation (?)), wie oben angedeutet.

Anhang A

Vektoroperationen

A.1 Differentialoperatoren

Bedeuten $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ orthogonale Einheitsvektoren in den unten spezifizierten Koordinatensystemen und A_1, A_2, A_3 die entsprechenden Komponenten eines Vektors $\vec{A}$, dann gilt

Kartesische Koordinaten:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\psi &= \hat{e}_1 \cdot \frac{\partial\psi}{\partial x_1} + \hat{e}_2 \cdot \frac{\partial\psi}{\partial x_2} + \hat{e}_3 \cdot \frac{\partial\psi}{\partial x_3} \\
\vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} \\
\vec{\nabla} \times \vec{A} &= \hat{e}_1 \cdot \left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}\right) + \hat{e}_2 \cdot \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1}\right) + \hat{e}_3 \cdot \left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2}\right) \\
\Delta\psi &= \vec{\nabla}^2\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x_3^2}
\end{aligned}$$

Zylinderkoordinaten:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\psi &= \hat{e}_1 \cdot \frac{\partial\psi}{\partial r} + \hat{e}_2 \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} + \hat{e}_3 \cdot \frac{\partial\psi}{\partial z} \\
\vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r \cdot A_1) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_2}{\partial\varphi} + \frac{\partial A_3}{\partial z} \\
\vec{\nabla} \times \vec{A} &= \hat{e}_1 \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_3}{\partial\varphi} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right) + \hat{e}_2 \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial r}\right) + \hat{e}_3 \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r}(r \cdot A_2) - \frac{\partial A_1}{\partial\varphi}\right) \\
\Delta\psi &= \vec{\nabla}^2\psi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \cdot \frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}
\end{aligned}$$

Kugelkoordinaten:

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla}\psi &= \hat{e}_1 \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r} + \hat{e}_2 \cdot \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \hat{e}_3 \cdot \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \\
\vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \cdot A_1) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta \cdot A_2) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_3}{\partial \varphi} \\
\vec{\nabla} \times \vec{A} &= \hat{e}_1 \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta \cdot A_3) - \frac{\partial A_2}{\partial \varphi}\right] \\
&\quad + \hat{e}_2 \left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_1}{\partial \varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_3)\right] + \hat{e}_3 \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_2) - \frac{\partial A_1}{\partial \theta}\right] \\
\Delta\psi &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2}
\end{aligned}
$$

Man beachte die Identität $\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\psi)$.

A.2 Vektoridentitäten

$$
\begin{aligned}
\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) &= \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \\
\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) &= (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} \\
(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) &= (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c}) \\
\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\psi &= 0 \\
\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{a}) &= 0 \\
\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{a}) &= \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) - \Delta\vec{a} \\
\vec{\nabla} \cdot (\psi\vec{a}) &= \vec{a} \cdot \vec{\nabla}\psi + \psi\vec{\nabla} \cdot \vec{a} \\
\vec{\nabla} \times (\psi\vec{a}) &= \vec{\nabla}\psi \times \vec{a} + \psi(\vec{\nabla} \times \vec{a}) \\
\vec{\nabla}(\vec{a} \cdot \vec{b}) &= (\vec{a} \cdot \vec{\nabla})\vec{b} + (\vec{b} \cdot \vec{\nabla})\vec{a} + \vec{a} \times (\vec{\nabla} \times \vec{b}) + \vec{b} \times (\vec{\nabla} \times \vec{a}) \\
\vec{\nabla} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) &= \vec{b} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{a}) - \vec{a} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{b}) \\
\vec{\nabla} \times (\vec{a} \times \vec{b}) &= \vec{a}(\vec{\nabla} \cdot \vec{b}) - \vec{b}(\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) + (\vec{b} \cdot \vec{\nabla})\vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{\nabla})\vec{b} \\
\Delta(\psi \cdot \varphi) &= \varphi \cdot \Delta\psi + \psi \cdot \Delta\varphi + 2 \cdot \vec{\nabla}\psi \cdot \vec{\nabla}\varphi
\end{aligned}
$$

Index